第 二 版 前 言

本版是根据《高等学校理科一九八一至一九八五年教材编写规划》和一九八〇年在上海举行的高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会扩大会议上审订的“常微分方程教学大纲”的要求，结合几年来的教学实践，在第一版的基础上修改、补充而成的。除对全书进行全面修改外，重点补充改写了第三、第五章的若干部分；增添了第七章一阶线性偏微分方程；此外，还充实了各章、节的习题。

本书第一版自一九七八年出版以来，得到了兄弟院校广大师生的关心和支持，他们为这次修订工作提供了很好的意见，在此谨向这些同志致谢．由于经验和水平的关系，本版一定还有错漏或不完善的地方，热切希望同志们批评指正。

编　　者

1982 年 10 月

编 者 说 明

本书是在中山大学数学力学系原《常微分方程讲义》基础上，参考国内外一些同类的教材，经过加工和补充编写而成. 全稿是在许淞庆教授主持下，由王高雄、周之铭、朱思铭、王寿松四位同志分工编写，经过反复讨论、多次修改完成. 由于时间匆促，更受科学水平和教学经验的限制，一定存在不少缺点，甚至还有错误之处. 恳切希望同志们提出批评和指正.

关于全书各章的主要内容，请参阅各章后面的“学习要点”. 下面就我们在编写过程中的几点考虑作些说明.

一、考虑到《常微分方程》不但是数学的基础课，同时也是常微分方程学科本身近代发展方向的重要基础. 本书除讲述常微分方程的最基本的从而是比较经典性的传统内容外，在第六章着重介绍微分方程的重要分支——稳定性理论的一般概念和重要结果，其中包括李雅普诺夫第二方法的主要定理及一类控制系统的绝对稳定性问题. 同时在第五章讲述线性方程组时，采用了矩阵和向量等工具. 为进一步学习这门学科准备某些必要的基础.

二、在编写过程中，力图做到“由浅入深，循序渐进”和“少而精”；注意突出重点，力求论证详细明了，便于自学. 在基本定理的证明中，反复运用皮卡逐步逼近法，希望读者不但了解定理内容，同时要掌握这一证明方法. 此外，每章还附“学习要点”，对该章内容加以总结，帮助读者掌握各部分基本内容. 我们略去一阶偏微分方程部分，对于奇解则只是简单地介绍它的概念和求法.

三、在加强基本理论教学的同时，注意运算技能的培养和训练. 书中各部分内容均配有典型例子，并加以说明. 此外，各章、节还配有相当数量的习题，希望通过做习题这个环节，来帮助培

养、提高解题能力和技巧.

四、高阶线性方程和线性方程组完全可以统一起来处理，采用矩阵和向量等工具，使叙述上显得十分方便．但是，我们认为在常系数高阶线性方程的具体求解过程上，不采用先过渡到方程组的办法，而直接应用本书第四章介绍的方法，可能更为简便些.

基于上述的考虑，我们将上述内容分别设章编写：先讲高阶线性方程，后讲一阶线性方程组．在第五章中，关于常系数线性方程组的基解矩阵的计算，我们避免了化矩阵为约当型的麻烦，但却不能不用到关于空间的分解等较深的代数知识．有较好的线性代数基础的读者，可以先学习第五章，而将第四章§4.1的结果作为有关定理的直接推论．因此，使用本书时，对第四章和第五章的有关内容，可以灵活处理，根据实际情况进行调整.

五、在内容安排上，我们既考虑到大纲中关于学时的要求，又不完全受其限制．书中某些章节，特别第六章的内容是供选讲用的．这一章的主要定理都给出了证明，有些用小字排印，那是为学有余力的读者而写的．这些内容讲多讲少请任课教师酌定.

六、最后，鉴于工程技术方面对拉普拉斯变换法的需要，除在第四章和第五章的有关部分加以应用外，还在书末配置附录I，介绍拉普拉斯变换的基本概念和主要性质．此外，考虑到微分方程边值问题的实际意义，在附录II中作为参考资料来介绍.

书末附有各章节习题答案，供读者参考.

本书由南京大学主审，复旦大学、武汉大学、兰州大学参加审查．审稿同志提出许多宝贵意见．这些意见对本书的定稿工作很有帮助．本书修改后，又经主审人何崇佑同志认真复审．在此，我们谨向这些同志表示谢意.

编者于广州中山大学

一九七八年七月

目　录

第一章 绪 论

数学分析中所研究的函数，是反映客观现实世界运动过程中量与量之间的一种关系. 但在大量的实际问题中遇到稍为复杂的一些运动过程时，反映运动规律的量与量之间的关系(即函数)往往不能直接写出来,却比较容易地建立这些变量和它们的导数(或微分)间的关系式. 这种联系着自变量、未知函数及它的导数(或微分)的关系式,数学上称之为**微分方程**，当然其中未知函数的导数或微分是不可缺少的. 本章将通过几个具体的例子，粗略地介绍常微分方程的一些物理背景和方程的建立问题，并讲述一些最基本的概念.

§1.1 微分方程:某些物理过程的数学模型

让我们先从一个具体的例子谈起.

例 1 物体冷却过程的数学模型

将某物体放置于空气中,在时刻 $t=0$ 时，测量得它的温度为 $u_0=150°C$, 10 分钟后测量得温度为 $u_1=100°C$. 我们要求决定此物体的温度 u 和时间 t 的关系,并计算 20 分钟后物体的温度. 这里我们假定空气的温度保持为 $u_a=24°C$.

解 为了解决上述问题，需要了解有关热力学的一些基本规律. 例如,热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的;在一定的温度范围内(其中包括了上述问题的温度在内)，一个物体的温度变化速度与这一物体的温度和其所在介质温度的差值成比例. 这是已为实验证明了的**牛顿(Newton)冷却定律**.

设物体在时刻 t 的温度为$u=u(t)$，则温度的变化速度以$\frac{du}{dt}$来表示．注意到热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的，因而 $u_0>u_a$，所以温差$u-u_a$恒正；又因物体将随时间而逐渐冷却，故温度变化速度$\frac{du}{dt}$恒负．因此由牛顿冷却定律得到

$$\frac{du}{dt}=-k(u-u_a) \tag{1.1}$$

这里 $k>0$ 是比例常数．方程(1.1)就是物体冷却过程的数学模型，它含有未知函数 u 及它的一阶导数$\frac{du}{dt}$，这样的方程，我们称为**一阶微分方程．**

为了决定物体的温度 u 和时间 t 的关系，我们要从方程(1.1)中"解出"u．注意到 u_a是常数，且 $u-u_a>0$，可将(1.1)改写成

$$\frac{d(u-u_a)}{u-u_a}=-k\,dt \tag{1.2}$$

这样，变量 u 和 t 被"分离"开来了．两边积分，得到

$$\ln(u-u_a)=-kt+\tilde{c} \tag{1.3}$$

这里 $\tilde{c}$ 是"任意常数"．根据对数的定义，得到

$$u-u_a=\mathrm{e}^{-kt+\tilde{c}}$$

由此，令 $\mathrm{e}^{\tilde{c}}=c$，即得

$$u=u_a+c\mathrm{e}^{-kt} \tag{1.4}$$

根据"初始条件"：

$$\text{当 } t=0 \text{ 时}, u=u_0 \tag{1.5}$$

容易确定"任意常数" c 的数值．为此目的，以 $t=0$ 和 $u=u_0$ 代入(1.4)，得到

$$c=u_0-u_a$$

于是

$$u=u_a+(u_0-u_a)\mathrm{e}^{-kt} \tag{1.6}$$

如果 k 的数值确定了，(1.6) 就完全决定了温度 u 与时间 t 的关系.

根据条件 $t=10$①, $u=u_1$, 得到

$$u_1=u_a+(u_0-u_a)e^{-10k}$$

由此，

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{u_0-u_a}{u_1-u_a}$$

用给定的 $u_0=150, u_1=100$ 和 $u_a=24$ 代入，得到

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{150-24}{100-24}=\frac{1}{10}\ln 1.66\approx 0.051$$

从而

$$u=24+126e^{-0.051t} \tag{1.7}$$

这样，根据方程(1.7)，就可以计算出任何时刻 t 物体的温度 u 的数值了. 例如 20 分钟后物体的温度就是 $u_2\approx 70$°C. 方程(1.7)还告诉我们，当 $t\to+\infty$ 时，$u\to 24$°C, 这可以解释为：经过一段时间后，物体的温度和空气的温度将会没有什么差别了. 事实上，经过 2 小时后，物体的温度已变为 24.3°C，与空气的温度已相当接近. 而经过 3 小时后，物体的温度为 24.01°C，我们的一些测量仪器已测不出它与空气的温度的差别了. 在实用上，人们认为这时物体的冷却过程已基本结束. 所以，经过一段时间后(比如 3 小时后)，可以认为物体的温度和空气的温度并没有什么差别了.

微分方程的"解"可以用图形表示出来，这往往给我们一个简明直观的了解. 图(1.1)就是"解"(1.7)的图形.

我们从例 1 中可以大体看出用微分方程解决实际问题的基本步骤：(1)建立起实际问题的数学模型，也就是建立反映这个实际问题的微分方程；(2)求解这个微分方程；(3)用所得的数学结果

---

① 为书写方便起见，在运算过程中，我们略去各量的量纲.

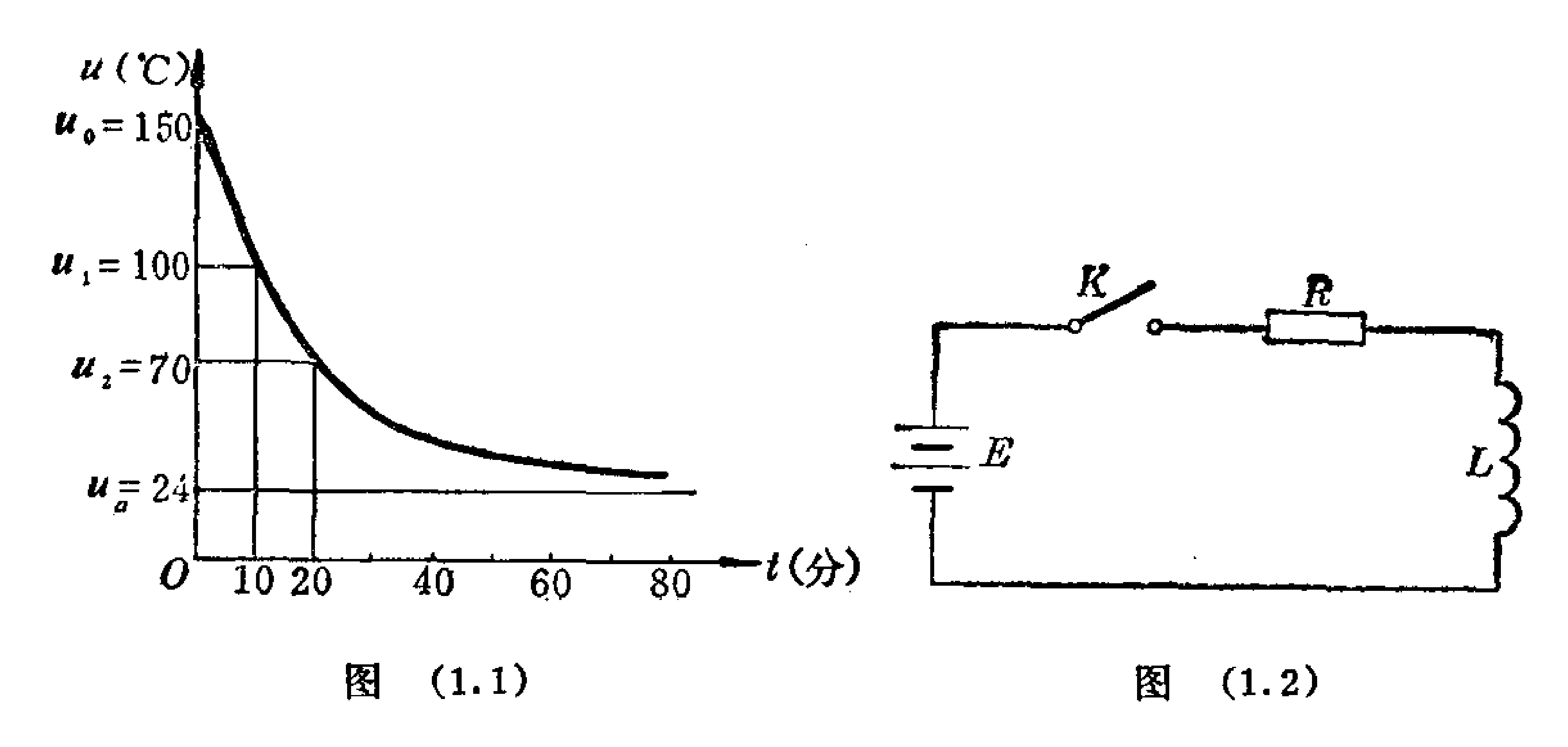


图 (1.1)　　图 (1.2)

解释实际问题，从而预测到某些物理过程的特定性质，以便达到能动地改造世界，解决实际问题的目的.

建立起实际问题的数学模型一般是比较困难的，因为这需要对与问题有关的自然规律有一个清晰的了解(例如，例 1 中就要了解热力学中的牛顿冷却定律)，同时也需要有一定的数学知识. 为了要建立起实际问题的数学模型，读者一定要学习有关的自然科学和工程技术的专业知识. 微分方程往往可以看作是各种不同物理现象的数学模型. 我们在建立微分方程的时候，只能考虑影响这个物理现象的一些主要因素，而把其他一些次要因素忽略掉. 如果的确考虑到了那些最主要的因素，那么，我们所得到的微分方程，它的解和所考虑的物理现象就是比较接近的. 这时，我们得到的数学模型是有用的；否则，我们还应该考虑其他的一些因素，以便建立起更为合理的数学模型.

下面再举几个例子说明如何建立微分方程的问题. 至于如何求解这些微分方程，则留待以后各章再讨论.

例 2　R-L 电路

如图(1.2)的 R-L 电路，它包含电感 L，电阻 R 和电源 E. 设 $t=0$ 时，电路中没有电流. 我们要求建立：当开关 K 合上后，电流 I 应该满足的微分方程. 这里假设 R、L、E 都是常数.

解 为了建立电路的微分方程，我们引用关于电路的基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律：在闭合回路中，所有支路上的电压的代数和等于零.

注意到经过电阻 R 的电压降是 RI，而经过电感 L 的电压降是 $L\frac{dI}{dt}$，由基尔霍夫第二定律得到

$$E-L\frac{dI}{dt}-RI=0$$

即

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L} \tag{1.8}$$

求出的 $I=I(t)$ 应满足条件：

$$当\ t=0\ 时，I=0 \tag{1.9}$$

如果假定在 $t=t_0$ 时，$I=I_0$，电源 E 突然短路，因而 E 变为零，此后亦保持为零．那末电流 I 满足方程

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=0 \tag{1.10}$$

及条件：

$$当\ t=t_0 时，I=I_0 \tag{1.11}$$

例 3 R-L-C 电路

如图(1.3)所示的 R-L-C 电路，它包括电感 L、电阻 R 和电容 C．我们设 R、L、C 均为常数，电源 $e(t)$ 是时间 t 的已知函数．我们要求建立：当开关 K 合上后，电流 I 应该满足的微分方程.

解 注意到经过电感 L、电阻 R 和电容 C 的电压降分别为：$L\frac{dI}{dt}$、RI 和 $\frac{Q}{C}$，其中 Q 为电量，因此由基尔霍夫第二定律得到

$$e(t)=L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C} \tag{1.12}$$

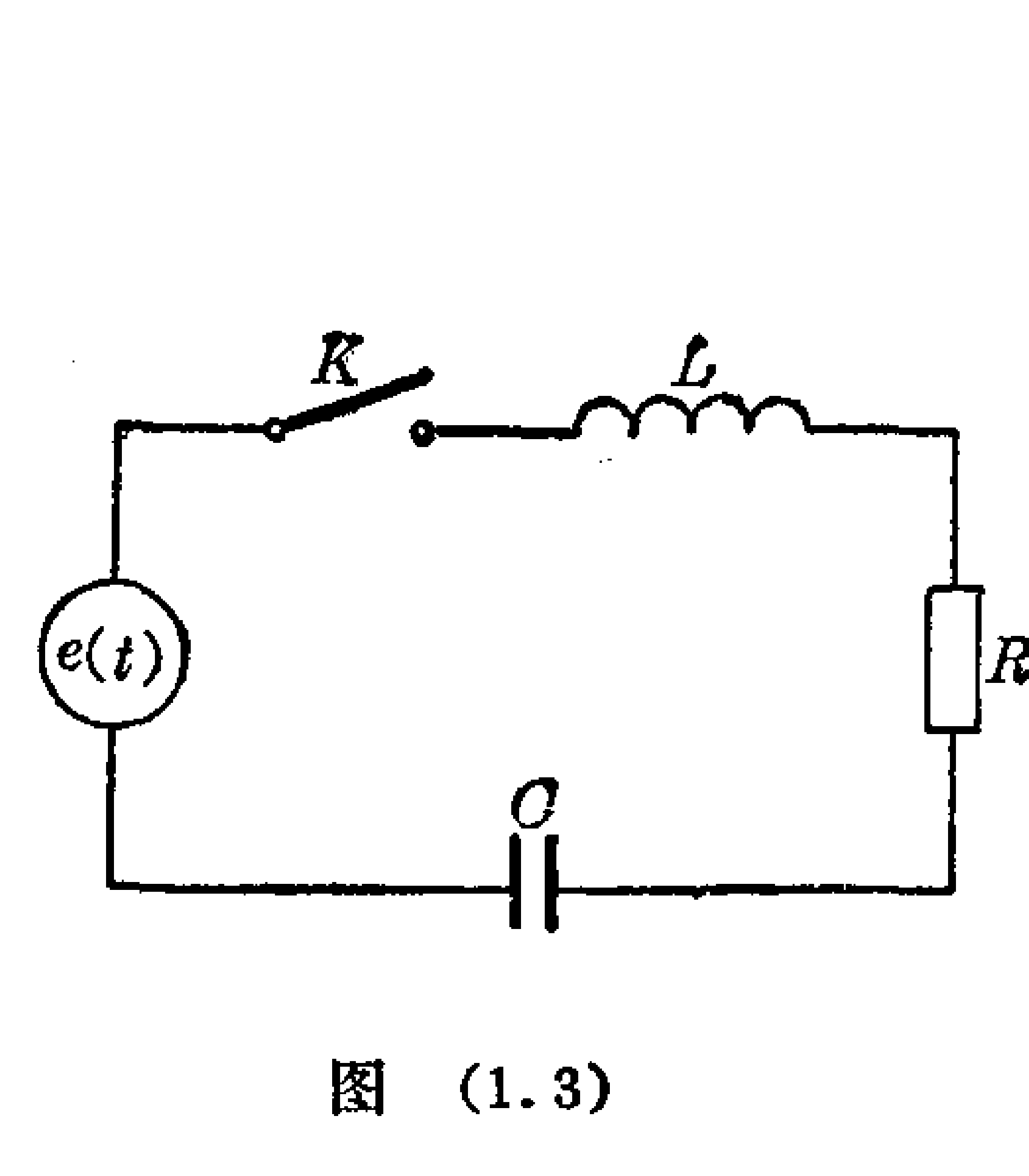


图 (1.3)

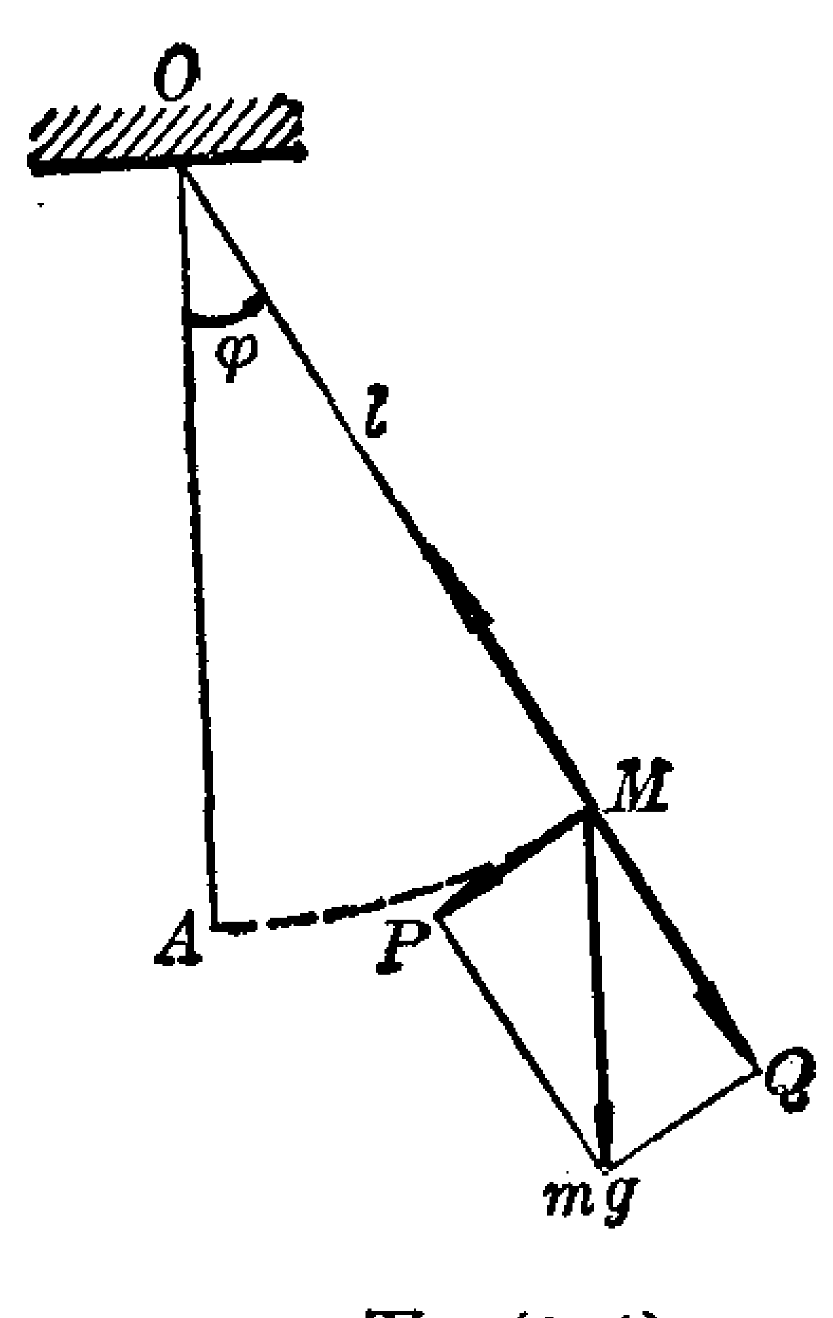


图 (1.4)

因为 $I=\frac{dQ}{dt}$，微分(1.12)得到

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt} \tag{1.13}$$

这就是电流 I 应该满足的微分方程．如果 $e(t)=$常数，得到

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{LC}=0 \tag{1.14}$$

如果又有 $R=0$，则得到

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{LC}=0 \tag{1.15}$$

例 4 数学摆

数学摆是系于一根长度为 l 的线上而质量为 m 的质点 M，在重力作用下，它在垂直于地面的平面上沿圆周运动，如图(1.4)所示．我们要确定摆的运动方程．

解 设取反时针运动的方向作为计算摆与铅垂线所成的角 φ 的正方向．质点 M 沿圆周的切向速度 v 可以表为 $v=l\frac{d\varphi}{dt}$．作用于质点 M 的重力 mg 将摆拉回平衡位置 A．把重力 mg 分解为两个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 和 $\overrightarrow{MP}$，第一个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 沿着半径 OM 的方向，与线的拉

力相抵消，它不会引起质点M的速度v的数值的改变. 第二个分量$\overrightarrow{MP}$沿着圆周的切线方向，它引起质点M的速度v的数值的改变. 因为$\overrightarrow{MP}$总是使质点M向着平衡位置A的方向运动，即当角φ为正时，向减小φ的方向运动；当角φ为负时，向增大φ的方向运动，所以$\overrightarrow{MP}$的数值等于$-mg\sin\varphi$. 因此，摆的运动方程是

$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\varphi \tag{1.16}$$

即

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{1.17}$$

如果只研究摆的微小振动，即当φ比较小时的情况，我们可以取$\sin\varphi$的近似值φ代入方程(1.17). 这样，就得到微小振动时摆的运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.18}$$

如果我们假设摆是在一个粘性的介质中摆动，那么，沿着摆的运动方向就存在一个与速度v成比例的阻力. 如果阻力系数是μ，则摆的运动方程变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.19}$$

如果沿着摆的运动方向恒有一个外力$F(t)$作用于它，这时摆的运动称为强迫微小振动，其方程为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t) \tag{1.20}$$

当要确定摆的某一个特定的运动时，我们应该给出摆的初始状态:

$$\text{当 } t=0 \text{ 时,}\quad \varphi=\varphi_0,\quad \frac{d\varphi}{dt}=\omega_0 \tag{1.21}$$

这里φ_0代表摆的初始位置，ω_0代表摆的初始角速度.

从以上所举的几个例子中不难发现，完全无关的、本质上不同的物理现象有时可以由同类型的微分方程来描述．例如，反映物体冷却过程的方程

$$\frac{du}{dt}=-k(u-u_a) \tag{1.1}$$

和反映 R-L 电路中电流变化规律的方程

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L} \tag{1.8}$$

都可以写成

$$\frac{dy}{dt}+K^2y=B \tag{1.22}$$

这里K、B是常数．而 R-L-C 电路的方程

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt} \tag{1.13}$$

和数学摆的强迫微小振动的方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t) \tag{1.20}$$

都具有同一形式

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t) \tag{1.23}$$

这里 b、c 是常数．又 L-C 电路方程

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{I}{LC}=0 \tag{1.15}$$

和阻力系数 $\mu=0$ 的数学摆的自由微小振动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.18}$$

均属于同样的数学模型

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k^2y=0 \tag{1.24}$$

这里 k 是常数．

不同的物理现象可以具有相同的数学模型这一事实，正是现代许多应用数学工作者和工程人员应用模拟方法解决物理或工程问题的理论根据．例如，利用电路来模拟某些力学系统或机械系统等等在现时已相当普遍．

以上我们只举出了常微分方程的一些物理背景．其实在自然科学和技术科学的其他领域中，例如化学、生物学、自动控制、电子技术等等，都提出了大量的微分方程问题．同样在社会科学的一些领域里也存在着微分方程的问题．因此社会的生产实践是常微分方程理论的取之不尽的基本源泉．此外，常微分方程与数学的其他分支的关系也是非常密切的，它们往往互相联系、互相促进．例如几何学就是常微分方程理论的丰富的源泉之一和有力工具．考虑到常微分方程是一门与实际联系比较密切的数学课程，我们自然应该注意它的实际背景与应用；而作为一门数学基础课程，我们又应该把重点放在应用数学方法研究微分方程本身的问题上．因此，读者不应该忽视本课程中所举出的实际例子以及有关的习题，并从中注意培养解决实际问题的初步能力．但是，按照课程的要求，我们要把主要的注意力集中到弄清常微分方程的一些基本理论和掌握各种类型方程的求解方法这两方面来，这是本课程的重点，也是我们解决实际问题的必要工具．

§1.2 基本概念[①]

1）常微分方程和偏微分方程

我们已经知道微分方程就是联系着自变量、未知函数以及它的导数的关系式．如果在微分方程中，自变量的个数只有一个，我们称这种微分方程为**常微分方程**；自变量的个数为两个或两个以

① 本书中出现的函数（包括常数），如无特别声明，均指实变量的实值函数．

上的微分方程称为偏微分方程.

方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t) \tag{1.23}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+t\frac{dy}{dt}+y=0 \tag{1.25}$$

就是常微分方程的例子,这里 y 是未知函数, t 是自变量.

方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=4\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.27}$$

就是偏微分方程的例子,这里 T 是未知函数,x、y、z、t 都是自变量.方程(1. 26)含有三个自变量,而方程(1. 27)含有两个自变量.

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶数. 例如, 方程(1. 23)是二阶常微分方程, 而方程(1. 26)与(1. 27)都是二阶偏微分方程. 一般的 n 阶常微分方程具有形式

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0 \tag{1.28}$$

这里 $F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)$ 是 x、y、$\frac{dy}{dx}$、$\cdots$、$\frac{d^ny}{dx^n}$ 的已知函数,而且一定含有 $\frac{d^ny}{dx^n}$; y 是未知函数, x 是自变量.

我们学习的这门课程是常微分方程. 今后, 我们把常微分方程简称为"微分方程",有时更简称为"方程".

2) 线性和非线性

如果方程(1. 28)的左端为 y 及 $\frac{dy}{dx}$, $\cdots$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ 的一次有理整式,则

称(1.28)为 n **阶线性微分方程**. 例如，方程(1.23)是二阶线性微分方程. 一般 n 阶线性微分方程具有形式

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x) \quad (1.29)$$

这里 $a_1(x), \cdots, a_n(x), f(x)$是 x 的已知函数.

不是线性方程的方程称为**非线性方程**. 例如,方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0 \quad (1.17)$$

是二阶非线性方程,而方程(1.25)是一阶非线性方程.

3) 解和隐式解

如果函数 $y=\varphi(x)$代入方程(1.28)后,能使它变为恒等式,则称函数 $y=\varphi(x)$为方程(1.28)的**解**. 例如,在§1.1的例1中，函数 $u=u_a+(u_0-u_a)e^{-kt}$ 就是方程(1.1)的解. 如果关系式 $\Phi(x,y)=0$ 决定的隐函数 $y=\varphi(x)$是(1.28)的解，我们称 $\Phi(x,y)=0$ 为方程(1.28)的**隐式解**①. 例如,一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \quad (1.30)$$

有解 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$;而关系式

$$x^2+y^2=1 \quad (1.31)$$

就是方程(1.30)的隐式解. 为了简单起见，以后我们不把解和隐式解加以区别,统称为方程的解.

4) 通解和特解

---

① 隐式解也称为"积分",相应地隐式通解也称为"通积分".

我们把含有 n 个独立的任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的解①

$$y=\varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

称为 n 阶方程(1.28)的**通解**. 同样，可以定义 n 阶方程(1.28)的**隐式通解**. 为了简单起见，以后我们也不把通解和隐式通解加以区别，统称为方程的通解. 为了确定微分方程一个特定的解，我们通常给出这个解所必需满足的条件，这就是所谓**定解条件**. 常见的定解条件是初始条件②. 所谓 n 阶微分方程(1.28)的**初始条件**是指如下的 n 个条件:

$$\text{当 } x=x_0 \text{ 时}, y=y_0, \quad \frac{dy}{dx}=y_0^{(1)}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=y_0^{(n-1)} \tag{1.32}$$

这里 $x_0, y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n+1$ 个常数. 初始条件(1.32)有时写为

$$y(x_0)=y_0, \quad \frac{dy(x_0)}{dx}=y_0^{(1)}, \cdots, \frac{d^{n-1}y(x_0)}{dx^{n-1}}=y_0^{(n-1)} \tag{1.33}$$

求微分方程满足定解条件的解，就是所谓**定解问题**. 当定解条件为初始条件时，相应的定解问题，就称为**初值问题**. 本书主要讨论初值问题.

我们把满足初始条件的解称为微分方程的**特解**. 初始条件不同，对应的特解也不同. 一般来说，特解可以通过初始条件的限制，

---

① 所谓函数 $y=\varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 含有 n 个独立常数，是指存在 $(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 的某一邻域，使得行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial c_n} \\ \frac{\partial\varphi'}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

其中 $\varphi^{(k)}$ 表示 φ 对 x 的 k 阶导数.

② 另一类定解条件为边界条件，有关问题见书末附录 II.

从通解中确定任意常数而得到．例如，在§1.1的例1中，含有一个任意常数 c 的解

$$u=u_a+ce^{-kt} \tag{1.4}$$

就是一阶方程(1.1)的通解；而

$$u=u_a+(u_0-u_a)e^{-kt} \tag{1.6}$$

就是满足初始条件

$$\text{当 } t=0 \text{ 时，} \quad u=u_0 \tag{1.5}$$

的特解．特解(1.6)可以在通解(1.4)中令 $c=u_0-u_a$ 而得到．

容易验证，二阶微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4y=0 \tag{1.34}$$

的通解为

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-4x} \tag{1.35}$$

这里 c_1, c_2 是任意常数；满足初始条件

$$y(0)=2, \quad \frac{dy(0)}{dx}=1 \tag{1.36}$$

的特解为

$$y=3e^{-x}-e^{-4x} \tag{1.37}$$

可以在通解(1.35)中令 $c_1=3, c_2=-1$ 而得到．

5）积分曲线和方向场

一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.38}$$

的解 $y=\varphi(x)$ 代表 xy 平面上的一条曲线，我们称它为微分方程的**积分曲线**．而微分方程(1.38)的通解 $y=\varphi(x,c)$ 对应于 xy 平面上的一族曲线，我们称这族曲线为**积分曲线族**．满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解就是通过点 (x_0, y_0) 的一条积分曲线．此外，方程

(1. 38)的积分曲线的每一点(x, y)上的切线斜率$\frac{dy}{dx}$刚好等于函数$f(x,y)$在这点的值，也就是说，积分曲线的每一点(x,y)及这点上的切线斜率$\frac{dy}{dx}$恒满足方程(1. 38)；反之，如果在一条曲线每点上其切线斜率刚好等于函数$f(x,y)$在这点的值，则这一条曲线就是方程(1. 38)的积分曲线.

设函数$f(x,y)$的定义域为D．在每一点$(x,y)\in D$处画上一个小线段，其斜率等于$f(x,y)$．我们把带有这种直线段的区域D称为由方程(1. 38)规定的**方向场**．这样，求微分方程(1. 38)经过点(x_0,y_0)的一条积分曲线，就是在区域D内求一条经过点(x_0,y_0)的曲线，使其上每一点处切线的斜率都与方向场在该点的方向相吻合.

在方向场中，方向相同的点的几何轨迹称为**等斜线**．微分方程(1. 38)的等斜线方程为

$$f(x, y)=k \tag{1.39}$$

其中k是参数．给出参数k的一系列充分接近的值，就可得足够密集的等斜线族，借此可以近似地作出微分方程(1. 38)的积分曲线．当然，要想更精确地作出积分曲线，还必须进一步弄清楚积分曲线的极值点和拐点等．显然，极值点和拐点如果存在的话，一般地，它们将分别满足方程

$$f(x,y)=0 \quad 及 \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$$

例 $\frac{dy}{dx}=1+xy$.

等斜线是双曲线$1+xy=k$．特别地当$k=1$时双曲线退化为一对直线$x=0$和$y=0$，就是说，在x轴和y轴上积分曲线有相同的切线方向.

进一步考虑积分曲线的极值点和拐点. 为此, 令 $k=0$ 时得 $1+xy=0$, 在此双曲线上 $y'=0$, $y''=y+x(1+xy)=y$, 可见积分曲线在双曲线的一支（对应于 $y>0$）上取得极小值，而在其另一支（对应于 $y<0$）上达到极大. 同样易知积分曲线的拐点位于曲线 $x+(x^2+1)y=0$ 上.

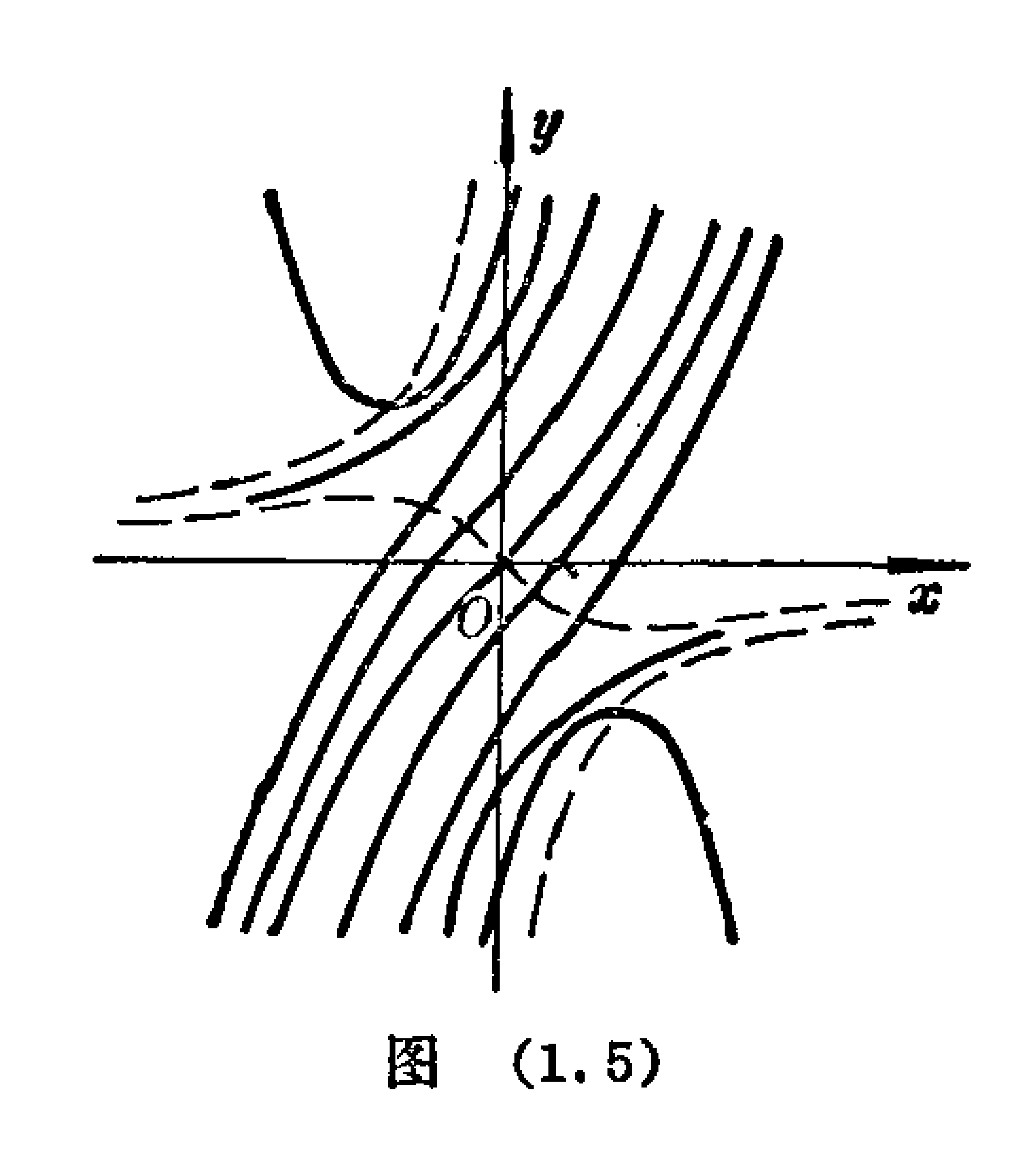


图 (1.5)

根据以上提供的信息, 我们即可近似地画出积分曲线的分布概况如图(1.5).

习　题　1.2

1. 指出下面微分方程的阶数, 并回答方程是否线性的:

(1) $\frac{dy}{dx}=4x^2-y$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+12xy=0$

(3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}-3y^2=0$

(4) $x\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+3xy=\sin x$

(5) $\frac{dy}{dx}+\cos y+2x=0$

(6) $\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+e^y=x$

2. 试验证下面函数均为方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解, 这里 $\omega>0$ 是常数:

(1) $y=\cos\omega x$

(2) $y=c_1\cos\omega x$ (c_1 是任意常数)

(3) $y=\sin\omega x$

(4) $y=c_2\sin\omega x$ (c_2是任意常数)

(5) $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ (c_1, c_2 是任意常数)

(6) $y=A\sin(\omega x+B)$ (A、B 是任意常数)

3. 验证下列各函数是相应微分方程的解:

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$, $xy'+y=\cos x$

(2) $y=2+c\sqrt{1-x^2}$, $(1-x^2)y'+xy=2x$ (c 是任意常数)

(3) $y=ce^x$, $y''-2y'+y=0$ (c 是任意常数)

(4) $y=e^x$, $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$

(5) $y=\sin x$, $y'+y^2-2y\sin x+\sin^2 x-\cos x=0$

(6) $y=-\dfrac{1}{x}$, $x^2y'=x^2y^2+xy+1$

(7) $y=x^2+1$, $y'=y^2-(x^2+1)y+2x$

(8) $y=-\dfrac{g(x)}{f(x)}$, $y'=\dfrac{f'(x)}{g(x)}y^2-\dfrac{g'(x)}{f(x)}$

4. 给定一阶微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2x$:

(1) 求出它的通解;

(2) 求通过点(1, 4)的特解;

(3) 求出与直线 $y=2x+3$ 相切的解;

(4) 求出满足条件$\int_0^1 ydx=2$ 的解;

(5) 绘出(2), (3), (4)中的解的图形.

5. 求下列两个微分方程的公共解:

(1) $y'=y^2+2x-x^4$

(2) $y'=2x+x^2+x^4-y-y^2$

6. 求微分方程 $y'+xy'^2-y=0$ 的直线积分曲线.

7. 微分方程 $4x^2y'^2-y^2=xy^3$, 证明其积分曲线关于坐标原点(0, 0)成中心对称的曲线, 也是此微分方程的积分曲线.

8. 物体在空气中的冷却速度与物体和空气的温差成比例, 如果物体在20分钟内由100°C冷至60°C, 那么, 在多久的时间内, 这个物体的温度达到30°C? 假设空气的温度为20°C.

9. 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程:

(1) 曲线上任一点的切线与该点的向径夹角为零;

(2) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长 l;

(3) 曲线上任一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积都等于常数 a^2;

(4) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴间的部分被切点等分;

(5) 曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方;

(6) 曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项;

(7) 曲线上任一点的切线的斜率与切点的横坐标成正比.

(提示: 过点(x, y)的切线的横截距和纵截距分别为 $x-y/y'$ 和 $y-xy'$)。

第二章　一阶微分方程的初等解法

本章将介绍一阶方程的初等解法，即把微分方程的求解问题化为积分问题①. 我们知道，在解 n 次代数方程时，总是希望能用四则运算及方根把解表示出来，但后来证明了，对于五次及五次以上的代数方程，用这种运算来表示解一般是不可能的. 对于微分方程的求解问题，也存在类似情况. 一般的一阶方程是没有初等解法的. 本章的任务就在于介绍若干能有初等解法的方程类型及其求解的一般方法，虽然这些类型是很有限的，但它们却反映了实际问题中出现的微分方程的相当部分. 因此，掌握这些类型方程的解法还是有重要实际意义的.

§ 2.1　变量分离方程与变量变换

2.1.1　变量分离方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y) \tag{2.1}$$

的方程，称为**变量分离方程**，这里 $f(x)$，$\varphi(y)$分别是 x，y 的连续函数.

现在说明方程(2.1)的求解方法.

如果 $\varphi(y)\neq 0$，我们可将(2.1)改写成

---

① 这里不要求积分一定能用初等函数表示. 例如方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}(e^{\frac{y}{x}}+1)$ 的解可表为 $\ln|x|=\mathrm{li}(e^{-y/x})+c$，其中 $\mathrm{li}(t)=\int\frac{dt}{\ln t}$ 称为对数积分函数，属超越函数类.

$$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx$$

这样，变量就“分离”开来了．两边积分，得到

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx+c \tag{2.2}$$

这里我们把积分常数 c 明确写出来，而把$\int\frac{dy}{\varphi(y)}$，$\int f(x)dx$分别理解为$\frac{1}{\varphi(y)}$，$f(x)$的某一个原函数①．如无特别声明，以后也作这样的理解．

把(2.2)作为确定 y 是 x 的隐函数的关系式．于是，对于任一常数 c，微分(2.2)的两边，就知(2.2)所确定的隐函数 $y=y(x,c)$ 满足方程(2.1)．因而，(2.2)是(2.1)的通解．

如果存在 y_0，使 $\varphi(y_0)=0$，直接代入，可知 $y=y_0$ 也是(2.1)的解．可能它不包含在方程的通解(2.2)中，必须予以补上．

例1　求解方程$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$．

解　将变量分离，得到

$$y\,dy=-x\,dx$$

两边积分，即得

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+\frac{c}{2}$$

因而，通解为

$$x^2+y^2=c$$

这里 c 是任意正常数．或者，解出 y，写出显函数形式的解

$$y=\pm\sqrt{c-x^2}.$$

例2　解方程

---

① 因而，常数 c 的取值必须以保证(2.2)有意义为前提．

$$\frac{dy}{dx}=y^2\cos x$$

并求满足初始条件：当 $x=0$ 时，$y=1$ 的特解.

解 将变量分离，得到

$$\frac{dy}{y^2}=\cos x\,dx$$

两边积分，即得

$$-\frac{1}{y}=\sin x+c$$

因而，通解为

$$y=-\frac{1}{\sin x+c}$$

这里 c 是任意常数.

此外，方程还有解 $y=0$.

为了确定所求的特解，以 $x=0$，$y=1$ 代入通解中以决定任意常数 c，得到

$$c=-1$$

因而，所求特解为

$$y=\frac{1}{1-\sin x}$$

例 3 求方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y \tag{2.3}$$

的通解，其中 $P(x)$是 x 的连续函数.

解 将变量分离，得到

$$\frac{dy}{y}=P(x)\,dx$$

两边积分，即得

$$\ln|y|=\int P(x)\,dx+\tilde{c}$$

这里 $\tilde{c}$ 是任意常数．由对数定义，即有

$$|y| = e^{\int P(x)dx + \tilde{c}}$$

即

$$y = \pm e^{\tilde{c}} \cdot e^{\int P(x)dx}$$

令 $\pm e^{\tilde{c}} = c$，得到

$$y = ce^{\int P(x)dx} \tag{2.4}$$

此外，$y=0$ 显然也是(2.3)的解．如果在(2.4)中允许 $c=0$，则 $y=0$ 也就包括在(2.4)中，因而，(2.3)的通解为(2.4)，其中 c 是任意常数．

2.1.2 可化为变量分离方程的类型

这里只介绍二种简单的情形：

1) 形如

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.5}$$

的方程，称为**齐次方程**，这里 $g(u)$ 是 u 的连续函数．

现在说明方程 (2.5) 的求解方法．此方法的要点是利用变量变换将 (2.5) 化为变量分离方程．利用变换来解微分方程是一种常用的技巧，在本章中，我们将反复运用这一方法，希望读者细心体会。

作变量变换

$$u = \frac{y}{x} \tag{2.6}$$

即 $y=ux$，于是

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u \tag{2.7}$$

将(2.6)、(2.7)代入(2.5)，则原方程变为

$$x\frac{du}{dx}+u=g(u)$$

整理后，得到

$$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x} \tag{2.8}$$

方程(2.8)是一个变量分离方程．可按 2.1.1 的方法求解，然后代回原来的变量，便得(2.5)的解．

例 4　求解方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\mathrm{tg}\frac{y}{x}$.

解　这是齐次方程，以$\frac{y}{x}=u$ 及$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$ 代入，则原方程变为

$$x\frac{du}{dx}+u=u+\mathrm{tg}u$$

即

$$\frac{du}{dx}=\frac{\mathrm{tg}u}{x} \tag{2.9}$$

将上式分离变量，即有

$$\mathrm{ctg}u\,du=\frac{dx}{x}$$

两边积分，得到

$$\ln|\sin u|=\ln|x|+\tilde{c}$$

这里 $\tilde{c}$ 是任意常数，整理后，得到

$$\sin u=\pm e^{\tilde{c}}\cdot x$$

令$\pm e^{\tilde{c}}=c$，得到

$$\sin u=cx \tag{2.10}$$

此外，方程(2.9)还有解

$$\mathrm{tg}u=0$$

即

$$\sin u=0$$

如果在(2.10)中允许 $c=0$，则 $\sin u=0$ 也就包括在(2.10)中，这就是说，方程(2.9)的通解为(2.10)。

代回原来的变量，得到原方程的通解为

$$\sin\frac{y}{x}=cx$$

例 5 求解方程 $x\frac{dy}{dx}+2\sqrt{xy}=y \quad (x<0)$.

解 将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x} \quad (x<0)$$

这是齐次方程. 以 $\frac{y}{x}=u$ 及 $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$ 代入，则原方程变为

$$x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u} \tag{2.11}$$

分离变量，得到

$$\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{dx}{x}$$

两边积分，得到(2.11)的通解

$$\sqrt{u}=\ln(-x)+c$$

即

$$u=[\ln(-x)+c]^2 \quad (\ln(-x)+c>0) \tag{2.12}$$

这里 c 是任意常数. 此外，方程(2.11)还有解

$$u=0$$

注意，此解并不包括在通解(2.12)中.

代回原来的变量，即得原方程的通解

$$y=x[\ln(-x)+c]^2 \quad (\ln(-x)+c>0)$$

及解 $y=0$.

顺带指出，我们也可将原方程的通解表为

$$y=\begin{cases}x[\ln(-x)+c]^2, & 当\ \ln(-x)+c>0,\\ 0, & 当\ \ln(-x)+c\leqslant 0.\end{cases}$$

它定义于整个负半轴上.

2）形如

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} \tag{2.13}$$

的方程也可经变量变换化为变量分离方程．这里 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 均为常数.

我们分别三种情形来讨论：

（1） $c_1=c_2=0$ 的情形.

这时方程(2.13)属齐次方程，事实上，我们有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}=\frac{a_1+b_1\dfrac{y}{x}}{a_2+b_2\dfrac{y}{x}}=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

因此，只要作变换 $u=\dfrac{y}{x}$，则方程就化为变量分离方程.

（2） $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$， 即$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$的情形.

设此比值为 k，即$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$，则方程可写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=f(a_2x+b_2y)$$

令 $a_2x+b_2y=u$，则方程化为

$$\frac{du}{dx}=a_2+b_2f(u)$$

这是变量分离方程.

（3） 现讨论$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ 及 c_1, c_2 不全为零的情形.

这时方程(2.13)右端的分子、分母都是 x、y 的一次式，因此

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \tag{2.14}$$

代表 xy 平面上两条相交的直线，设交点为(α,β).

显然，$\alpha\neq0$ 或 $\beta\neq0$，因为否则 $\alpha=\beta=0$，即交点为坐标原点，那么必有 $c_1=c_2=0$，这正是情形(1)．从几何上知道要将所考虑的情形化为情形(1)只需进行坐标平移，将坐标原点$(0,0)$移至(α,β)就行了．事实上，若令

$$\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases} \tag{2.15}$$

则(2.14)化为

$$\begin{cases} a_1X+b_1Y=0 \\ a_2X+b_2Y=0 \end{cases}$$

从而(2.13)变为

$$\frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g\left(\frac{Y}{X}\right) \tag{2.16}$$

因此，我们得到这种情形求解的一般步骤如下：

1° 解联立代数方程(2.14)，设其解为 $x=\alpha, y=\beta$；

2° 作变换(2.15)将方程化为齐次方程(2.16)；

3° 再经变换 $u=\dfrac{Y}{X}$将(2.16)化为变量分离方程；

4° 求解上述变量分离方程，最后代回原变量即可得原方程(2.13)的解．

我们指出，上述解题的方法和步骤也适用于比方程(2.13)更一般的方程类型

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

此外，诸如

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$$

$$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$$

$$x^2\frac{dy}{dx}=f(xy)$$

$$\frac{dy}{dx}=xf\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

以及

$$M(x,y)(xdx+ydy)+N(x,y)(xdy-ydx)=0$$

(其中M,N为x，y的齐次函数，次数可以不相同)等一些方程类型，均可通过适当的变量变换化为变量分离方程．读者不妨作为练习把相应的变换找出来．

例 6　求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3} \tag{2.17}$$

解　解方程组

$$\begin{cases}x-y+1=0\\x+y-3=0\end{cases}$$

得$x=1,y=2$．令

$$\begin{cases}x=X+1\\y=Y+2\end{cases}$$

代入方程(2.17)，则有

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y} \tag{2.18}$$

再令

$$u=\frac{Y}{X}\quad 即\quad Y=uX$$

则(2.18)化为

$$\frac{dX}{X}=\frac{1+u}{1-2u-u^2}du$$

两边积分，得

$$\ln X^2=-\ln|u^2+2u-1|+\tilde{c}$$

因此

$$X^2(u^2+2u-1)=\pm e^{\tilde{c}}$$

记$\pm e^{\tilde{c}}=c_1$，并代回原变量，就得

$$Y^2+2XY-X^2=c_1$$

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=c_1$$

此外，容易验证

$$u^2+2u-1=0$$

即

$$Y^2+2XY-X^2=0$$

也是方程(2.18)的解．因此方程(2.17)的通解为

$$y^2+2xy-x^2-6y-2x=c$$

其中 c 为任意常数．

2.1.3 应用举例

例 7 电容器的充电和放电

如图(2.1)所示的R-C电路，开始时电容C上没有电荷，电容两端的电压为零．我们把开关K合上“1”后，电池E就对电容C充电，电容C两端的电压u_C逐渐升高．经过相当时间后，电容充电完毕，我们再把开关K合上“2”，这时电容就开始了放电过程．现在要求找出充、放电过程中，电容C两端的电压u_C随时间 t 的变

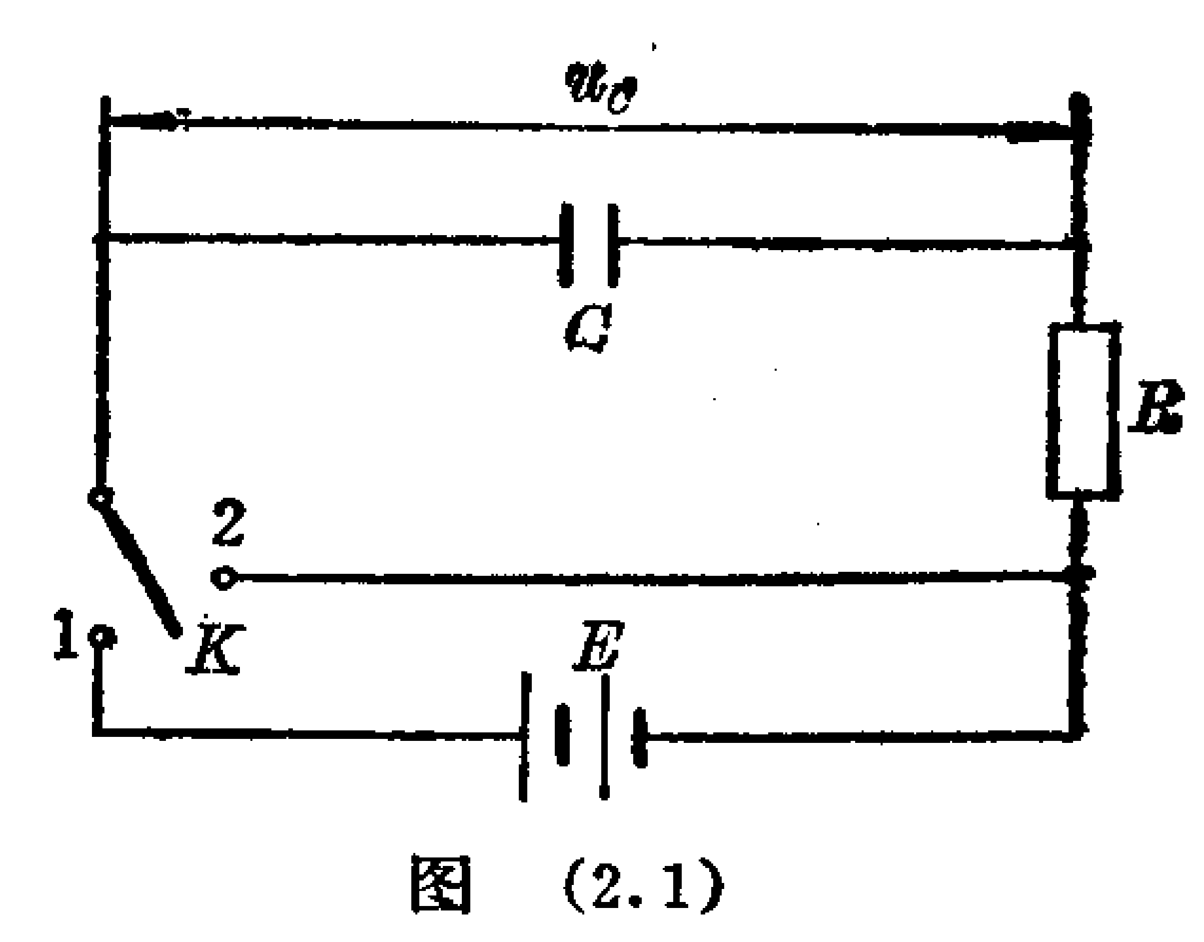


图 (2.1)

化规律.

解 对于充电过程，由闭合回路的基尔霍夫第二定律，有

$$u_C+RI=E \tag{2.19}$$

对电容C充电时，电容上的电量Q逐渐增多，根据 $Q=Cu_C$ 得到

$$I=\frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}(Cu_C)=C\frac{du_C}{dt} \tag{2.20}$$

将(2.20)代入(2.19)，得到u_C满足的微分方程

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E \tag{2.21}$$

这里R、C、E都是常数. 方程(2.21)属于变量分离方程. 将(2.21)分离变量，得到

$$\frac{du_C}{u_C-E}=-\frac{dt}{RC}$$

两边积分，得到

$$\ln|u_C-E|=-\frac{1}{RC}t+c_1$$

即

$$u_C-E=\pm e^{c_1}e^{-\frac{1}{RC}t}=c_2e^{-\frac{1}{RC}t}$$

这里 $c_2=\pm e^{c_1}$ 为任意常数.

将初始条件：$t=0$ 时，$u_C=0$ 代入，得到

$$c_2=-E$$

所以

$$u_C=E(1-e^{-\frac{1}{RC}t}) \tag{2.22}$$

这就是 R-C 电路充电过程中电容C两端的电压的变化规律. 由(2.22)知道，电压u_C从零开始逐渐增大，且当 $t\to+\infty$时，$u_C\to E$，见图(2.2). 在电工学中，通常称 $\tau=RC$ 为时间常数，当$t=3\tau$时，$u_C=0.95E$，就是说，经过3τ的时间后，电容C上的电压已达到外

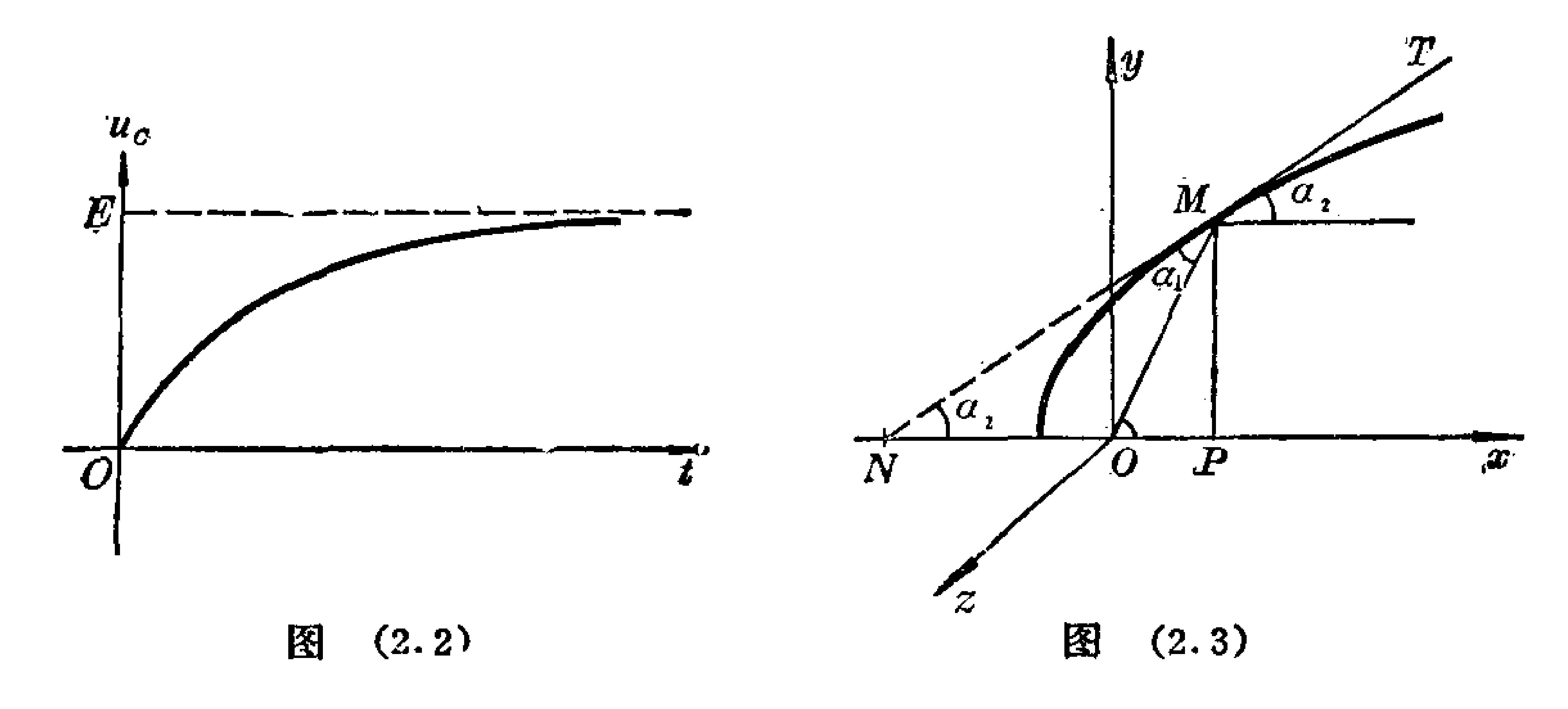


图 (2.2)　　　　图 (2.3)

加电压的95%. 实用上，通常认为这时电容C的充电过程已基本结束. 易见充电结果$u_C=E$.

对于放电过程的讨论，可以类似地进行，留给读者自己去完成.

例8　探照灯反射镜面的形状

在制造探照灯的反射镜面时，总是要求将点光源射出的光线平行地反射出去，以保证探照灯有良好的方向性，试求反射镜面的几何形状.

解　取光源所在处为坐标原点，而x轴平行于光的反射方向，如图(2.3). 设所求曲面由曲线

$$\begin{cases} y=f(x) \\ z=0 \end{cases} \tag{2.23}$$

绕x轴旋转而成，则求反射镜面的问题归结为求xy平面上的曲线$y=f(x)$的问题.

过曲线$y=f(x)$上任一点$M(x,y)$作切线NT，则由光的反射定律：入射角等于反射角，容易推知

$$\alpha_1=\alpha_2$$

从而

$$\overline{OM}=\overline{ON}$$

注意到

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{tg}\alpha_2=\frac{\overline{MP}}{\overline{NP}}$$

及 $\overline{OP}=x,\ \overline{MP}=y,\ \overline{OM}=\sqrt{x^2+y^2}$

就得到函数 $y=f(x)$所应满足的微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \tag{2.24}$$

这是齐次方程. 由 2.1.2 知引入新变量 $u=\frac{y}{x}$可将它化为变量分离方程, 再经直接积分即可求得方程的解. 这个求解过程留给读者自己去完成.

在此,我们顺便指出,齐次方程也可通过变换 $v=\frac{x}{y}$而化为变量分离方程. 以方程(2.24)为例,由 $x=yv$ 得$\frac{dx}{dy}=v+y\frac{dv}{dy}$, 代入(2.24)得到

$$v+y\frac{dv}{dy}=v+\mathrm{sgn}y\cdot\sqrt{1+v^2}$$

于是

$$\frac{dy}{y}=\mathrm{sgn}y\cdot\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} \tag{2.25}$$

积分(2.25)并代回原来变量,经化简整理,最后得

$$y^2=c(c+2x) \tag{2.26}$$

其中 c 为任意正常数.

(2.26)就是所求的平面曲线,它是抛物线, 因此, 反射镜面的形状为旋转抛物面

$$y^2+z^2=c(c+2x) \tag{2.27}$$

习 题 2.1

求下列方程的解:

1. $\frac{dy}{dx}=2xy$, 并求满足初始条件: $x=0, y=1$ 的特解.

2. $y^2dx+(x+1)dy=0$, 并求满足初始条件: $x=0, y=1$ 的特解.

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{xy+x^3y}$

4. $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$

5. $(y+x)dy+(x-y)dx=0$

6. $x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2-y^2}$

7. $\mathrm{tg}y\,dx-\mathrm{ctg}x\,dy=0$

8. $\frac{dy}{dx}+\frac{e^{y^2+3x}}{y}=0$

9. $x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$

10. $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$

作适当的变量变换求解下列方程(11—17):

11. $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$

12. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+y)^2}$

13. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$

14. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+5}{x-y-2}$

15. $\frac{dy}{dx}=(x+1)^2+(4y+1)^2+8xy+1$

16. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^6-2x^2}{2xy^5+x^2y^2}$

17. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3+3xy^2+x}{3x^2y+2y^3-y}$

18. 证明方程$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=f(xy)$ 经变换 $xy=u$ 可化为变量分离方程. 并由

此求解下列方程:

(1) $y(1+x^2y^2)dx=xdy$

(2) $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$

19. 已知$f(x)\int_0^x f(t)dt=1, x\neq0$, 试求函数 $f(x)$的一般表达式.

20. 求具有性质

$$x(t+s)=\frac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$$

的函数 $x(t)$, 已知 $x'(0)$存在.

21. 求一曲线, 使它的切线介于坐标轴间的部分被切点分成相等的部分.

22. 在图(2.1)所示的 R-C 电路中, 设 $E=10$ 伏, $R=100$ 欧, $C=0.01$ 法, 而开始时电容 C 上没有电荷. 问:

(1) 当开关K合上"1"后, 经过多长时间电容C上的电压 $u_C=5$ 伏?

(2) 当开关K合上"1"后, 经过相当长的时间(如 1 分钟后)开关K从"1"突然转至"2", 试求 u_C 的变化规律, 并问经过多长时间 $u_C=5$ 伏?

23. 求出习题 1.2 第 9 题(1)所确定的曲线, 其中 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

24. 证明满足习题 1.2 第 9 题(7)所给条件的曲线是抛物线族.

§ 2.2 线性方程与常数变易法

一阶线性微分方程

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y+c(x)=0$$

在 $a(x)\neq0$ 的区间上可以写成

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x) \tag{2.28}$$

今后我们主要讨论形如(2.28)的方程, 对于 $a(x)$有零点的情形分别在 $a(x)\neq0$ 的相应区间上讨论. 这里假设 $P(x)$, $Q(x)$ 在考虑的区间上是 x 的连续函数.

若 $Q(x)\equiv 0$，(2.28)变为

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y \tag{2.3}$$

(2.3)称为**一阶齐线性方程**.

若 $Q(x)\neq 0$，(2.28)称为**一阶非齐线性方程**.

(2.3) 是变量分离方程. 我们已在§2.1例3中求得它的通解为

$$y=c\mathrm{e}^{\int P(x)dx} \tag{2.4}$$

这里 c 是任意常数.

现在讨论非齐线性方程(2.28)的通解的求法.

不难看出，(2.3)是(2.28)的特殊情形，两者既有联系又有差别. 因此可以设想它们的解也应该有一定的联系而又有差别. 我们试图利用方程(2.3)的通解(2.4)的形式去求出方程(2.28)的通解. 显然，如果(2.4)中 c 恒保持为常数，它必不可能是(2.28)的解. 我们设想：在(2.4)中，将常数 c 变易为 x 的待定函数 $c(x)$，使它满足方程(2.28)，从而求出 $c(x)$. 为此，令

$$y=c(x)\mathrm{e}^{\int P(x)dx} \tag{2.29}$$

微分之，得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dc(x)}{dx}\mathrm{e}^{\int P(x)dx}+c(x)P(x)\mathrm{e}^{\int P(x)dx} \tag{2.30}$$

以(2.29)、(2.30)代入(2.28)，得到

$$\frac{dc(x)}{dx}\mathrm{e}^{\int P(x)dx}+c(x)P(x)\mathrm{e}^{\int P(x)dx}=P(x)c(x)\mathrm{e}^{\int P(x)dx}+Q(x)$$

即

$$\frac{dc(x)}{dx}=Q(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)dx}$$

积分后得到

$$c(x)=\int Q(x)\,\mathrm{e}^{-\int P(x)dx}dx+\tilde{c} \tag{2.31}$$

这里 $\tilde{c}$ 是任意常数. 将(2.31)代入(2.29), 得到

$$y=\mathrm{e}^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\,\mathrm{e}^{-\int P(x)dx}dx+\tilde{c}\right) \tag{2.32}$$

这就是方程(2.28)的通解.

这种将常数变易为待定函数的方法, 我们通常称为**常数变易法**, 以后我们还要运用这种方法.

我们看到, 常数变易法实际上亦是一种变量变换的方法, 通过变换(2.29)可将方程(2.28)化为变量分离方程.

例 1 求方程 $(x+1)\frac{dy}{dx}-ny=\mathrm{e}^x(x+1)^{n+1}$ 的通解, 这里 n 为常数.

解 将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x+1}y=\mathrm{e}^x(x+1)^n \tag{2.33}$$

首先, 求齐线性方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x+1}y=0$$

的通解, 从

$$\frac{dy}{y}=\frac{n}{x+1}dx$$

得到齐线性方程的通解

$$y=c(x+1)^n$$

其次应用常数变易法求非齐线性方程的通解. 为此, 在上式中把 c 看成为 x 的待定函数 $c(x)$, 即

$$y=c(x)(x+1)^n \tag{2.34}$$

微分之, 得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dc(x)}{dx}(x+1)^n+n(x+1)^{n-1}c(x) \tag{2.35}$$

以(2.34)及(2.35)代入(2.33)，得到

$$\frac{dc(x)}{dx}=e^x$$

积分之，求得

$$c(x)=e^x+\tilde{c}$$

因此，以所求的 $c(x)$ 代入(2.34)，即得原方程的通解

$$y=(x+1)^n(e^x+\tilde{c})$$

这里 $\tilde{c}$ 是任意常数.

例 2 求方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$的通解.

解 原方程不是未知函数 y 的线性方程，但我们可将它改写为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y}$$

即

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x-y \tag{2.36}$$

把 x 看作未知函数，y 看作自变量，这样，对于 x 及$\frac{dx}{dy}$来说，方程(2.36)就是一个线性方程.

首先，求出齐线性方程

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x$$

的通解为

$$x=cy^2 \tag{2.37}$$

其次，利用常数变易法求非齐线性方程(2.36)的通解. 把 c 看成 $c(y)$，微分(2.37)，得到

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dc(y)}{dy}y^2+2c(y)y$$

代入(2.36),得到

$$\frac{dc(y)}{dy}=-\frac{1}{y}$$

积分之,即可求得

$$c(y)=-\ln|y|+\tilde{c}$$

从而,原方程的通解为

$$x=y^2(\tilde{c}-\ln|y|)$$

这里 $\tilde{c}$ 是任意常数.

形如

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n \tag{2.38}$$

的方程, **称为伯努利(Bernoulli)方程**. 这里 $P(x)$, $Q(x)$为 x 的连续函数,$n\neq 0$, 1 是常数.

利用变量变换可将伯努利方程化为线性方程. 事实上, 对于 $y\neq 0$,用 y^{-n} 乘(2.38)两边,得到

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=y^{1-n}P(x)+Q(x) \tag{2.39}$$

引入变量变换

$$z=y^{1-n} \tag{2.40}$$

从而

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \tag{2.41}$$

将(2.40),(2.41)代入(2.39),得到

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x) \tag{2.42}$$

这是线性方程, 可按上面介绍的方法求得它的通解, 然后代回原来的变量,便得到(2.38)的通解. 此外, 当 $n>0$ 时, 方程还有解

$y=0$.

例 3 求方程 $\frac{dy}{dx}=6\frac{y}{x}-xy^2$ 的通解.

解 这是 $n=2$ 时的伯努利方程. 令

$$z=y^{-1}$$

算得

$$\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

代入原方程得到

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{6}{x}z+x$$

这是线性方程，求得它的通解为

$$z=\frac{c}{x^6}+\frac{x^2}{8}$$

代回原来的变量 y，得到

$$\frac{1}{y}=\frac{c}{x^6}+\frac{x^2}{8}$$

或者

$$\frac{x^6}{y}-\frac{x^8}{8}=c$$

这就是原方程的通解.

此外，方程还有解 $y=0$.

习 题 2.2

求下列方程的解:

1. $\frac{dy}{dx}=y+\sin x$

2. $\frac{dx}{dt}+3x=e^{2t}$

3. $\frac{ds}{dt}=-s\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t$

4. $\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y=e^{x}x^{n}$, n 为常数。

5. $\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y-1=0$

6. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{xy^2}$

7. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$

8. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$

9. $\frac{dy}{dx}=\frac{ay}{x}+\frac{x+1}{x}$, a 为常数。

10. $x\frac{dy}{dx}+y=x^3$

11. $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$

12. $(y\ln x-2)ydx=xdy$

13. $2xydy=(2y^2-x)dx$

14. $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y+3x}{x^2}$

15. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy+x^3y^3}$

16. $y=e^x+\int_0^x y(t)dt$

17. 设函数 $\varphi(t)$ 于 $-\infty<t<+\infty$ 上连续，$\varphi'(0)$ 存在且满足关系式

$$\varphi(t+s)=\varphi(t)\varphi(s)$$

试求此函数.

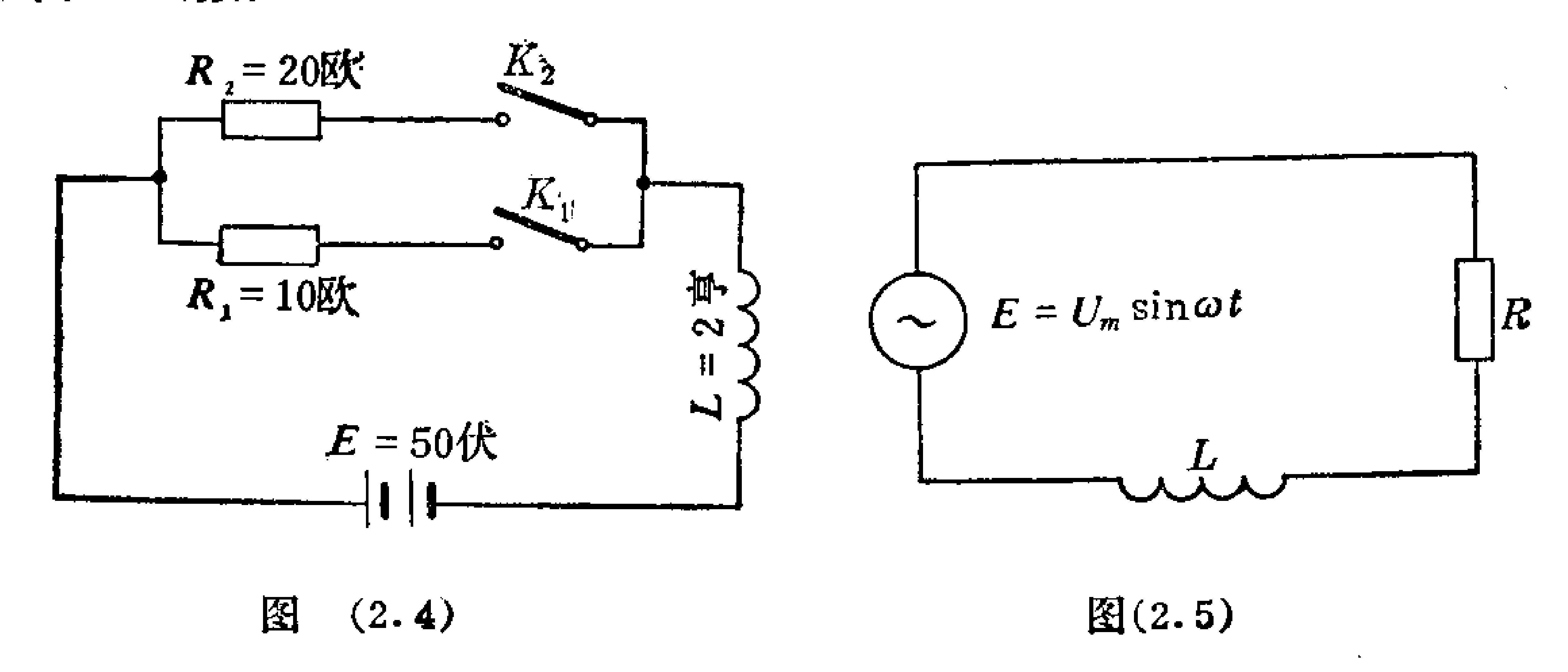


图 (2.4)　　图(2.5)

18. 如图(2.4)所示的 R-L 电路，试求

(1) 当开关 K_1 合上 10 秒后，电感 L 上的电流；

(2) K_1 合上 10 秒后再将 K_2 合上，求 K_2 合上 20 秒后，电感 L 上的电流.

19. 试求图(2.5)所示的 R-L 电路电感上电流 $I(t)$ 的变化规律，并解释其物理意义，设 $t=0$ 时，$I=0$.

20. 试证：

(1) 一阶非齐线性方程(2.28)的任两解之差必为相应的齐线性方程(2.3)之解；

(2) 若 $y=y(x)$ 是(2.3)的非零解，而 $y=\tilde{y}(x)$ 是(2.28)的解，则方程(2.28)的通解可表为 $y=cy(x)+\tilde{y}(x)$，其中 c 为任意常数.

(3) 方程(2.3)任一解的常数倍或任两解之和(或差)仍是方程(2.3)的解.

21. 求解习题 1.2 第 9 题(5)和(6).

22. 求解下列方程：

(1) $(x^2-1)y'-xy+1=0$

(2) $x(x^2-1)y'-(2x^2-1)y+x^3=0$

(3) $y'\sin x\cdot\cos x-y-\sin^3 x=0$

§2.3 恰当方程与积分因子

2.3.1 恰当方程

我们可以将一阶方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

写成微分的形式

$$f(x,y)dx-dy=0$$

或把 x,y 平等看待，写成下面具有对称形式的一阶微分方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{2.43}$$

这里假设 $M(x,y)$，$N(x,y)$ 在某矩形域内是 x,y 的连续函数，且

具有连续的一阶偏导数．这样的形式有时便于探求方程的通解．

如果方程(2.43)的左端恰好是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，即

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy\equiv du(x,y)$$
$$\equiv\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{2.44}$$

则称(2.43)为**恰当方程**．

容易验证，(2.43)的通解就是

$$u(x,y)=c \tag{2.45}$$

这里 c 是任意常数．

这样，我们自然会提出如下问题：

(1) 如何判别(2.43)是恰当方程？

(2) 如果(2.43)是恰当方程，如何求得函数 $u=u(x,y)$？

为了回答以上问题，我们首先察看，如果(2.43)是恰当方程时，函数 $M(x,y)$，$N(x,y)$应该具有什么性质？从(2.44)得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M \tag{2.46}$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N \tag{2.47}$$

将(2.46)、(2.47)分别对 y、x 求偏导数，得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

由于$\frac{\partial M}{\partial y}$，$\frac{\partial N}{\partial x}$的连续性，可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

故

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.48}$$

因此，(2.48)是(2.43) 为恰当方程的必要条件. 现在证明(2.48)也是(2.43)为恰当方程的充分条件，或更进一步证明：如果方程(2.43)满足条件(2.48)，我们能找到函数 u，使它同时适合方程(2.46)和(2.47). 这样，就回答了以上提出的两个问题.

我们从关系式(2.46)出发，把 y 看作参数，解这个方程，得到

$$u=\int M(x,y)dx+\varphi(y) \tag{2.49}$$

这里 $\varphi(y)$是 y 的任意可微函数. 我们现在来选择 $\varphi(y)$ 使 u 同时满足(2.47)，即

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\frac{d\varphi(y)}{dy}=N$$

由此

$$\frac{d\varphi(y)}{dy}=N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \tag{2.50}$$

我们证明，(2.50)的右端与 x 无关. 为此，只需证明(2.50)的右端对 x 的偏导数恒等于零. 事实上

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]&=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]\\&=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right]\\&=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\equiv 0\end{aligned}$$

在我们的假设条件下，上述交换求导的顺序是允许的. 于是，(2.50)右端的确只含有 y，积分之，得到

$$\varphi(y)=\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy \tag{2.51}$$

将(2.51)代入(2.49)，即求得

$$u=\int M(x,y)\,dx+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right]dy$$

因此，恰当方程(2.43)的通解就是

$$\int M(x,y)\,dx+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right]dy=c \qquad (2.52)$$

这里 c 是任意常数.

例 1 求$(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0$ 的通解.

解 这里 $M=3x^2+6xy^2$, $N=6x^2y+4y^3$, 这时

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=12xy$$

因此方程是恰当方程.

现在求 u, 使它同时满足如下两个方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2 \qquad (2.53)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+4y^3 \qquad (2.54)$$

由(2.53)对 x 积分，得到

$$u=x^3+3x^2y^2+\varphi(y) \qquad (2.55)$$

为了确定 $\varphi(y)$, 将(2.55)对 y 求导数，并使它满足(2.54), 即得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+\frac{d\varphi(y)}{dy}=6x^2y+4y^3$$

于是

$$\frac{d\varphi(y)}{dy}=4y^3$$

积分后可得

$$\varphi(y)=y^4$$

将 $\varphi(y)$代入(2.55), 得到

$$u=x^3+3x^2y^2+y^4$$

因此，方程的通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4=c$$

这里 c 是任意常数.

往往在判断方程是恰当方程后，并不需要按照上述一般方法来求解,而是采取“分项组合”的办法,先把那些本身已构成全微分的项分出，再把剩下的项凑成全微分. 这种方法要求熟记一些简单二元函数的全微分,如

$$\left.\begin{aligned}
&y\,dx+x\,dy=d(xy)\\
&\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right)\\
&\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)\\
&\frac{y\,dx-x\,dy}{xy}=d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)\\
&\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)\\
&\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2-y^2}=\frac{1}{2}d\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.56)$$

现在试用这种方法求解下面例题.

例 2 用“分项组合”的办法,求解例 1.

解 把方程重新“分项组合”，得到

$$3x^2dx+4y^3dy+6xy^2dx+6x^2y\,dy=0$$

即

$$dx^3+dy^4+3y^2dx^2+3x^2dy^2=0$$

或者写成

$$d(x^3+y^4+3x^2y^2)=0$$

于是,方程的通解为

$$x^3+y^4+3x^2y^2=c$$

这里 c 是任意常数.

例 3 求解方程 $\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$

解 因为 $\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$, 故方程是恰当方程. 把方程重新"分项组合", 得到

$$\cos x dx+\frac{1}{y}dy+\left(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy\right)=0$$

即

$$d\sin x+d\ln|y|+\frac{y dx-x dy}{y^2}=0$$

或者写成

$$d\left(\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}\right)=0$$

于是, 方程的通解为

$$\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}=c$$

这里 c 是任意常数.

2.3.2 积分因子

恰当方程可以通过积分求出它的通解. 因此能否将一个非恰当方程化为恰当方程就有很大的意义. 积分因子就是为了解决这个问题而引进的概念.

如果存在连续可微的函数 $\mu=\mu(x,y)\neq 0$, 使得

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

为一恰当方程, 即存在函数 v, 使

$$\mu M dx+\mu N dy\equiv dv \tag{2.57}$$

则称 $\mu(x,y)$ 为方程(2.43)的**积分因子**.

这时 $v(x,y)=c$ 是(2.57) 的通解. 因而也就是(2.43) 的通解.

由(2.56)看到，同一方程 $ydx-xdy=0$ 可以有不同的积分因子 $\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2},\frac{1}{xy},\frac{1}{x^2\pm y^2}$. 可以证明，只要方程有解存在，则必有积分因子存在，并且不是唯一的. 因此，在具体解题过程中，由于求出的积分因子不同从而通解可能具有不同的形式.

根据 2.3.1，函数 $\mu(x,y)$ 为(2.43)的积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

即

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \tag{2.58}$$

这是一个以 μ 为未知函数的一阶线性偏微分方程. 要想通过解方程(2.58)来求积分因子，从而得到方程(2.43)的解. 在一般情况下，将比求解方程(2.43)本身更困难. 但是，在若干特殊情形中，求(2.58)的一个特解还是容易的，所以(2.58)也就提供了寻求特殊形式的积分因子的一个途径.

例如，对于方程(2.43)，如果存在只与 x 有关的积分因子 $\mu=\mu(x)$，则 $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$，这时方程(2.58)变成

$$N\frac{d\mu}{dx}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

即

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx \tag{2.59}$$

由此可知，方程(2.43)有只与 x 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x) \tag{2.60}$$

这里 $\psi(x)$ 仅为 x 的函数. 假如条件(2.60)成立，则根据方程

(2.59)，可以求得方程(2.43)的一个积分因子

$$\mu=e^{\int\psi(x)dx} \tag{2.61}$$

同样，(2.43)有只与 y 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\varphi(y)$$

这里 $\varphi(y)$ 仅为 y 的函数．从而求得方程(2.43)的一个积分因子

$$\mu=e^{\int\varphi(y)dy}$$

例 4 试用积分因子法解线性方程(2.28)．

解 将(2.28)改写成

$$[P(x)y+Q(x)]dx-dy=0 \tag{2.62}$$

这时，$M=P(x)y+Q(x)$，$N=-1$，算得

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-P(x)$$

因而，线性方程有只与 x 有关的积分因子 $\mu=e^{-\int P(x)dx}$．以 $\mu=e^{-\int P(x)dx}$ 乘(2.62)得到

$$P(x)e^{-\int P(x)dx}ydx-e^{-\int P(x)dx}dy+Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0$$

即

$$yde^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}dy-Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0$$

或者写成

$$d(ye^{-\int P(x)dx})-Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0$$

因此，(2.62)的通解为

$$ye^{-\int P(x)dx}-\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=c$$

或者改写为

$$y=e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c\right)$$

这与前面得到的结果(2.32)完全一样. 这里我们又得到一个解线性方程(2.28)的方法.

积分因子一般是不容易求得的，我们可以先从求特殊形状的积分因子(如只与 x 或只与 y 有关的积分因子)开始，或者通过观察法进行“分项组合”而求得积分因子. 下面通过例子说明一些简单的积分因子的求法. 运用积分因子解题，需要有一定的技巧，这就要多作练习，从中体会.

例 5 求解方程 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\quad(y>0)$.

解 方程可以改写为

$$xdx+ydy=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

或

$$\frac{1}{2}d(x^2+y^2)=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

容易看出，此方程有积分因子 $\mu=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，以 μ 乘之，得

$$\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=dx$$

故通解为

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+c$$

或

$$y^2=c(c+2x)$$

例 6 求解方程 $ydx+(y-x)dy=0$.

解 这里 $M=y$, $N=y-x$, $\frac{\partial M}{\partial y}=1$, $\frac{\partial N}{\partial x}=-1$, 方程不是恰当的.

方法 1　因为$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\dfrac{2}{y}$只与 y 有关，故方程有只与 y 有关的积分因子

$$\mu=e^{\int\left(-\frac{2}{y}\right)dy}=e^{-2\ln|y|}=\frac{1}{y^2}$$

以 $\mu=\dfrac{1}{y^2}$ 乘方程两边，得到

$$\frac{1}{y}dx+\frac{1}{y}dy-\frac{x\,dy}{y^2}=0$$

或者写成

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}+\frac{dy}{y}=0$$

因而，通解为

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c$$

方法 2　将方程改写为

$$y\,dx-x\,dy=-y\,dy$$

由(2.56)知道，左端有积分因子 $\mu=\dfrac{1}{y^2}$ 或 $\mu=\dfrac{1}{x^2}$, …，但考虑到右端只与 y 有关，故取 $\mu=\dfrac{1}{y^2}$ 为方程的积分因子，由此得到

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=-\frac{1}{y}dy$$

因此，通解为

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c$$

顺便指出，这里采用别的求解方法也是十分方便的．例如：

方法 3　方程可以写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-y}$$

这是齐次方程，令$\dfrac{y}{x}=u$，代入得到

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{u}{1-u}$$

即

$$\frac{1-u}{u^2}du=\frac{dx}{x}$$

因此，通解为

$$-\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|-c$$

代回原来的变量，即得

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c$$

方法 4　把 x 看作未知函数，y 看作自变量，方程变为线性方程

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}-1$$

同样解得

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c$$

此外，易见 $y=0$ 也是原方程的解。

习　题　2.3

验证下列方程是恰当方程，并求出方程的解：

1. $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$
2. $(y-3x^2)dx-(4y-x)dy=0$
3. $\left[\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}\right]dx+\left[\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy=0$
4. $2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0$
5. $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+1\right)dx+\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}\right)dy=0$

求下列方程的解:

6. $2x(ye^{x^2}-1)dx+e^{x^2}dy=0$

7. $(e^x+3y^2)dx+2xydy=0$

8. $2xydx+(x^2+1)dy=0$

9. $ydx-xdy=(x^2+y^2)dx$

10. $ydx-(x+y^3)dy=0$

11. $(y-1-xy)dx+xdy=0$

12. $(y-x^2)dx-xdy=0$

13. $(x+2y)dx+xdy=0$

14. $[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]dx+x\cos(x+y)dy=0$

15. $(y\cos x-x\sin x)dx+(y\sin x+x\cos x)dy=0$

16. $x(4ydx+2xdy)+y^3(3ydx+5xdy)=0$

17. 试导出方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 分别具有形为 $\mu(x+y)$ 和 $\mu(xy)$ 的积分因子的充要条件.

18. 设 $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续, 试证方程 $dy-f(x,y)dx=0$ 为线性方程的充要条件是它有仅依赖于 x 的积分因子.

19. 试证齐次方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 当 $xM+yN\neq 0$ 时有积分因子 $\mu=\frac{1}{xM+yN}$.

20. 设函数 $f(u)$, $g(u)$ 连续、可微且 $f(u)\neq g(u)$, 试证方程

$$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$$

有积分因子 $\mu=(xy[f(xy)-g(xy)])^{-1}$.

21. 假设方程(2.43)中的函数 $M(x,y)$, $N(x,y)$ 满足关系

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=Nf(x)-Mg(y)$$

其中 $f(x)$、$g(y)$ 分别为 x 和 y 的连续函数, 试证方程(2.43)有积分因子 $\mu=\exp\left(\int f(x)dx+\int g(y)dy\right)$.

22. 求出伯努利方程的积分因子.

23. 设 $\mu(x,y)$ 是方程(2.43)的积分因子, 从而求得可微函数 $U(x,y)$, 使得 $dU=\mu(Mdx+Ndy)$. 试证 $\tilde{\mu}(x,y)$ 也是方程(2.43)的积分因子的充要条件是 $\tilde{\mu}(x,y)=\mu\varphi(U)$, 其中 $\varphi(t)$ 是 t 的可微函数.

24. 设 $\mu_1(x,y)$，$\mu_2(x,y)$是方程(2.43)的两个积分因子，且 $\mu_1/\mu_2\neq$常数，求证 $\mu_1/\mu_2=c$（任意常数）是方程(2.43)的通解.

25. 假设第 19 题中微分方程还是恰当的，试证它的通解可表为 $xM(x,y)+yN(x,y)=c$（c 为任意常数）.

§2.4　一阶隐方程与参数表示

一阶隐微分方程的一般形式可表示为:

$$F(x,y,y')=0$$

如果能从此方程中解出导数 y'，其表达式为 $y'=f(x,y)$，则可依 $f(x,y)$ 的具体形状如何而选择 §2.1—§2.3 所介绍的某一方法进行求解.但如果难以从方程中解出 y'，或即使解出 y'，而其表达式相当复杂的情况下，则宜采用引进参数的办法使之变为导数已解出的方程类型，这正是本节讨论的主要思想. 这里主要介绍以下四种类型:

1) $y=f(x,y')$，　2) $x=f(y,y')$

3) $F(x,y')=0$，　4) $F(y,y')=0$

2.4.1　可以解出 y(或 x)的方程

1) 首先讨论形如

$$y=f\left(x,\frac{dy}{dx}\right) \tag{2.63}$$

的方程的解法，这里假设函数 $f\left(x,\frac{dy}{dx}\right)$有连续的偏导数.

引进参数$\frac{dy}{dx}=p$，则(2.63)变为

$$y=f(x,p) \tag{2.64}$$

将(2.64)两边对 x 求导数，并以$\frac{dy}{dx}=p$ 代入，得到

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \tag{2.65}$$

方程(2.65)是关于 x,p 的一阶微分方程，但它的导数已解出. 于是我们可按§2.1—§2.3的方法求出它的解.

若已求得(2.65)的通解的形式为

$$p=\varphi(x,c)$$

将它代入(2.64),得到

$$y=f(x,\varphi(x,c))$$

这就是(2.63)的通解.

若求得(2.65)的通解的形式为

$$x=\psi(p,c)$$

则得到(2.63)的参数形式的通解为

$$\begin{cases}x=\psi(p,c)\\ y=f(\psi(p,c),p)\end{cases}$$

其中 p 是参数, c 是任意常数.

若求得(2.65)的通解的形式为

$$\Phi(x,p,c)=0$$

则得到(2.63)的参数形式的通解

$$\begin{cases}\Phi(x,p,c)=0\\ y=f(x,p)\end{cases}$$

其中 p 是参数, c 为任意常数.

例1 求方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2x\frac{dy}{dx}-y=0$ 的解.

解 解出 y, 并令 $\frac{dy}{dx}=p$, 得到

$$y=p^3+2xp \tag{2.66}$$

两边对 x 求导数，得到

$$p=3p^2\frac{dp}{dx}+2x\frac{dp}{dx}+2p$$

即

$$3p^2dp+2xdp+pdx=0$$

当 $p\neq 0$ 时，上式乘以 p 得到

$$3p^3dp+2xpdp+p^2dx=0$$

积分之，注意到中间一项为 xdp^2，得到

$$\frac{3p^4}{4}+xp^2=c$$

解出 x，得到

$$x=\frac{c-\frac{3}{4}p^4}{p^2}$$

将它代入(2.66)，即得

$$y=p^3+\frac{2\left(c-\frac{3}{4}p^4\right)}{p}$$

因此，得到方程的参数形式的通解

$$\begin{cases} x=\dfrac{c}{p^2}-\dfrac{3}{4}p^2 \\ y=\dfrac{2c}{p}-\dfrac{1}{2}p^3 \end{cases} \qquad (p\neq 0)$$

当 $p=0$ 时，由(2.66)直接推知 $y=0$ 也是方程的解.

例 2 求方程 $y=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}$ 的解.

解 令 $\frac{dy}{dx}=p$，得到

$$y=p^2-xp+\frac{x^2}{2} \tag{2.67}$$

两边对 x 求导数，得到

$$p=2p\frac{dp}{dx}-x\frac{dp}{dx}-p+x$$

或

$$\left(\frac{dp}{dx}-1\right)(2p-x)=0$$

从

$$\frac{dp}{dx}-1=0$$

解得

$$p=x+c$$

并将它代入(2.67)得到方程的通解

$$y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2 \tag{2.68}$$

又从 $2p-x=0$ 解得

$$p=\frac{x}{2}$$

以此代入(2.67)又得方程的一个解

$$y=\frac{x^2}{4} \tag{2.69}$$

注意此解与通解(2.68)中的每一条积分曲线均相切(见图(2.6)),

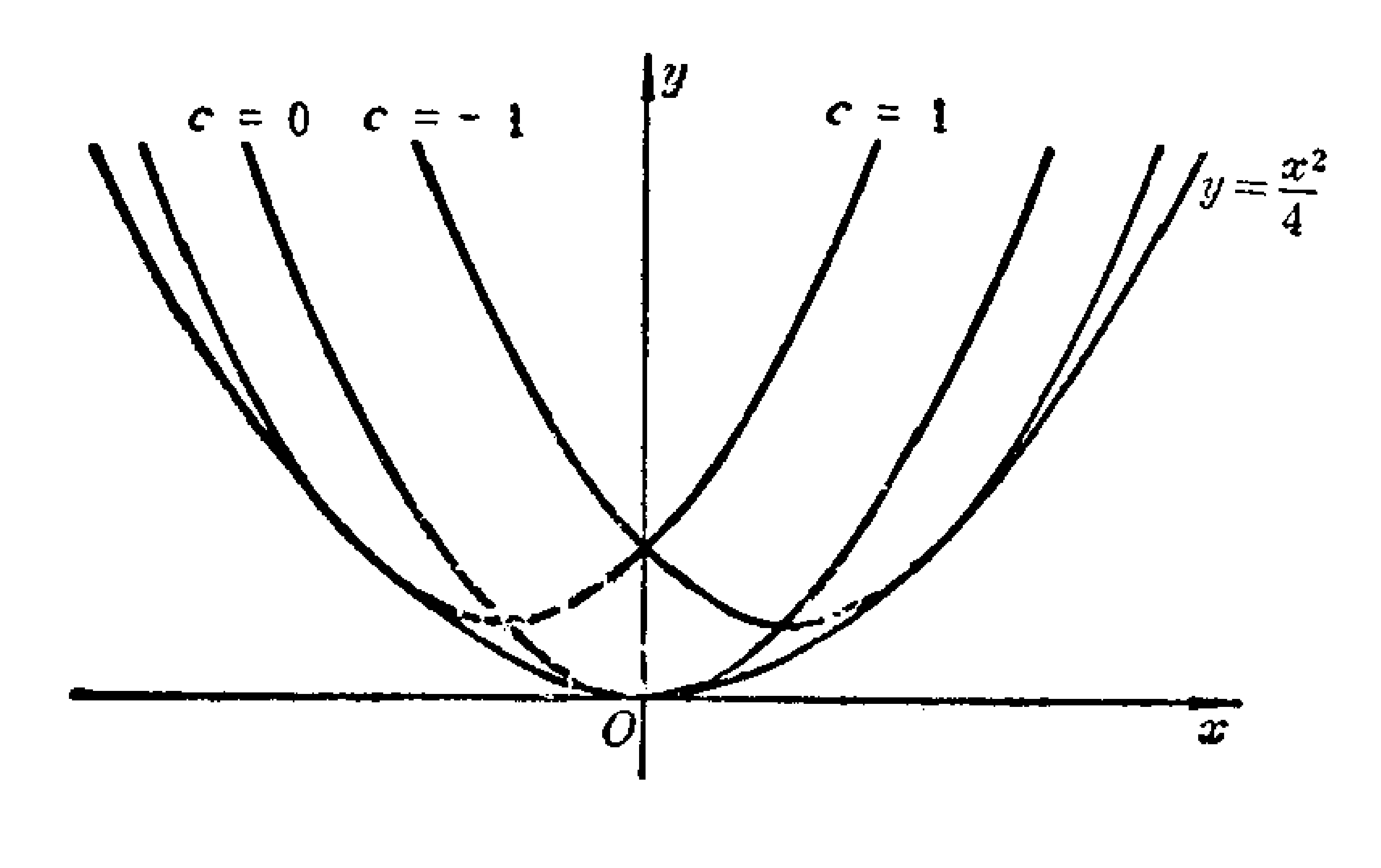


图 (2.6)

这样的解我们称之为奇解．在下一章将给出奇解的确切含义．

2）形如

$$x=f\left(y,\frac{dy}{dx}\right) \tag{2.70}$$

的方程的求解方法与方程(2.63)的求解方法完全类似．这里假定函数 $f\left(y,\frac{dy}{dx}\right)$有连续偏导数．

引进参数$\frac{dy}{dx}=p$，则(2.70)变为

$$x=f(y,p) \tag{2.71}$$

将(2.71)两边对 y 求导数，然后以$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$代入，得到

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} \tag{2.72}$$

方程(2.72)是关于 y,p 的一阶微分方程，但它的导数$\frac{dp}{dy}$已解出，于是可按§2.1—§2.3 的办法去求解．设求得通解为

$$\Phi(y,p,c)=0$$

则得(2.70)的通解为

$$\begin{cases}x=f(y,p)\\ \Phi(y,p,c)=0\end{cases}$$

例 3 求解例 1 中的方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2x\frac{dy}{dx}-y=0$

解 解出 x，并以 $\frac{dy}{dx}=p$ 代入，得到

$$x=\frac{y-p^3}{2p},\qquad (p\neq 0) \tag{2.73}$$

对 y 求导数，得到

$$\frac{1}{p}=\frac{p\left(1-3p^2\frac{dp}{dy}\right)-(y-p^3)\frac{dp}{dy}}{2p^2}$$

或

$$pdy+ydp+2p^3dp=0$$

积分之，即有

$$2yp+p^4=c$$

因而

$$y=\frac{c-p^4}{2p}$$

代入(2.73)，求得

$$x=\frac{\frac{c-p^4}{2p}-p^3}{2p}=\frac{c-3p^4}{4p^2}$$

所以，方程的通解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{c}{4p^2}-\dfrac{3}{4}p^2\\ y=\dfrac{c}{2p}-\dfrac{p^3}{2}\end{cases}\qquad (p\neq 0)$$

此外，还有解 $y=0$. 这和例 1 所得结果完全一样（这里的任意常数 c 换成 $4c$）.

2.4.2 不显含 y(或 x)的方程

3) 现在讨论形如

$$F(x,y')=0 \tag{2.74}$$

的方程的解法.

记 $p=y'=\frac{dy}{dx}$. 从几何的观点看，$F(x,p)=0$ 代表 xp 平面上的一条曲线. 设把这曲线表为适当的参数形式

$$x=\varphi(t),\quad p=\psi(t) \tag{2.75}$$

这里 t 为参数. 再注意到，沿方程(2.74)的任何一条积分曲线上，恒满足基本关系

$$dy = p\,dx$$

以(2.75)代入上式得

$$dy = \psi(t)\varphi'(t)\,dt$$

两边积分，得到

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c$$

于是得到方程(2.74)的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c \end{cases}$$

c 为任意常数.

例 4 求解方程 $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0\left(这里\ y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$.

解 令 $y' = p = tx$. 则由方程得

$$x = \frac{3t}{1+t^3}$$

从而

$$p = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

于是

$$dy = \frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}\,dt$$

积分之，得到

$$y = \int \frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}\,dt = \frac{3}{2}\;\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + c$$

因此，方程的通解表成参数形式:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3}{2}\;\dfrac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + c \end{cases}$$

4) 形如

$$F(y, y')=0 \tag{2.76}$$

的方程，其求解方法同方程(2.74)的求解方法类似.

记 $p=y'$，引入参数 t，将方程表为适当的参数形式:

$$y=\varphi(t), p=\psi(t)$$

由关系式 $dy=pdx$ 得 $\varphi'(t)dt=\psi(t)dx$，由此得

$$dx=\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt, x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c$$

于是

$$\begin{cases}x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c\\ y=\varphi(t)\end{cases}$$

为方程的参数形式的通解，其中 c 为任意常数.

此外，不难验证，若 $F(y,0)=0$ 有实根 $y=k$，则 $y=k$ 也是方程的解.

例 5 求解方程 $y^2(1-y')=(2-y')^2$.

解 令 $2-y'=yt$，则与原微分方程消去 y' 后，有

$$y^2(yt-1)=y^2t^2$$

由此得

$$y=\frac{1}{t}+t$$

并且

$$y'=1-t^2$$

这是原微分方程的参数形式. 因此

$$dx=\frac{dy}{y'}=-\frac{1}{t^2}dt$$

积分之，得到

$$x=\frac{1}{t}+c$$

于是求得方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t}+c \\ y=\dfrac{1}{t}+t \end{cases}$$

或者消去参数 t 得

$$y=x+\frac{1}{x-c}-c$$

其中 c 为任意常数.

此外，当 $y'=0$ 时原方程变为 $y^2=4$，于是 $y=\pm 2$ 也是方程的解.

习　题　2.4

求解下列方程:

1. $xy'^3=1+y'$
2. $y'^3-x^3(1-y')=0$
3. $y=y'^2e^{y'}$
4. $y(1+y'^2)=2a$，a 为常数.
5. $x^2+y'^2=1$
6. $y^2(y'-1)=(2-y')^2$

本章学习要点

在这一章里，我们讨论了一阶方程

$$F(x,y,y')=0$$

的若干类型的初等解法，归纳起来就是:

1. 若方程能就 y' 解出，即方程取形式

$$y'=f(x,y)\quad 或\quad M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

可按 § 2.1—§ 2.3 介绍的方法去求解.

2. 若方程能就 y（或 x）解出

$$y=f(x,y')[\text{或 } x=f(y,y')]$$

则令 $y'=p$ 后，把问题化为求解关于 p 与 x（或 y）之间的一阶方程:

$$p=f'_x(x,p)+f'_p(x,p)\frac{dp}{dx} \tag{2.65}$$

$$\left[\text{或}\frac{1}{p}=f'_y(y,p)+f'_p(y,p)\frac{dp}{dy}\right] \tag{2.72}$$

若按 § 2.1—§ 2.3 的办法求得方程(2.65)[或(2.72)]的通解为

$$\Phi(x,p,c)=0 \quad [\text{或 } \Phi(y,p,c)=0]$$

则它与 $y=f(x,p)$[或 $x=f(y,p)$] 一起构成原方程的通解的参数形式(见 2.4.1).

3. 若方程不能就 y', x 或 y 解出,对于形如

$$F(x,y')=0 \text{ 或 } F(y,y')=0$$

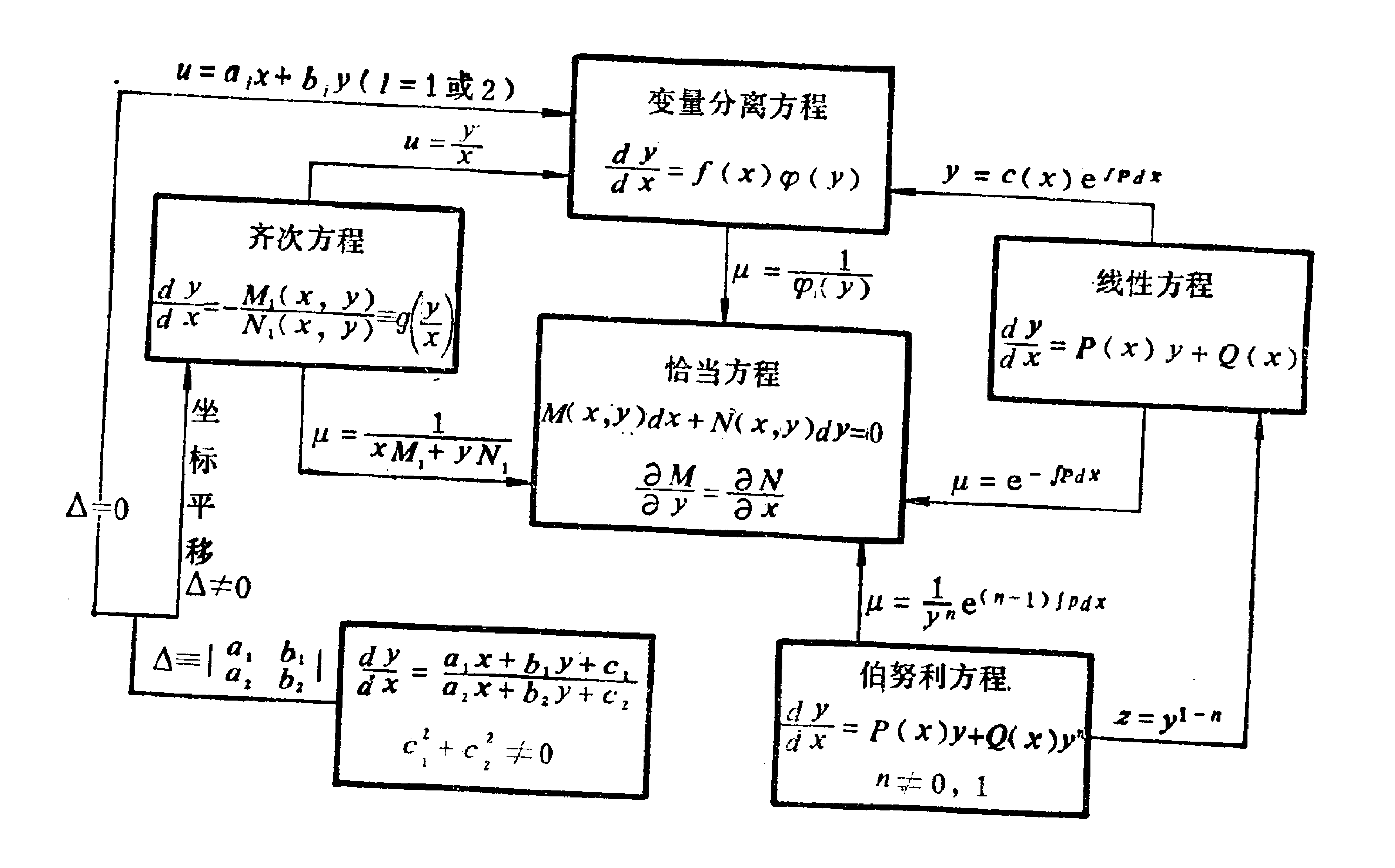
的方程，可按 2.4.2 介绍的方法处理:引入参数 t，将方程表示为参数形式,再注意到关系式 $dy=y'dx$,就将问题转化为求解关于 y（或 x)与 t 的一阶方程，且其导数 $\frac{dy}{dt}\left(\text{或}\frac{dx}{dt}\right)$ 已表示为 t 的已知函数,最后的工作就是求积分的问题.

所有上列情形都归结到形如

$$y'=f(x,y) \quad \text{或} \quad M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

的方程的求解问题. 在 § 2.1—§ 2.3 里，我们主要介绍了五种类型的方程(变量分离方程,齐次方程,线性方程,伯努利方程及恰当方程）的初等解法. 实际上作为基础的不外是变量分离方程和恰当方程，其他类型的方程均可借助变量变换或积分因子化为这两种类型,这可简略地表示如图(2.7).

历史上，数学家莱布尼兹(Leibnitz)曾经专门从事于利用变量变换的办法解决一阶微分方程的求解问题，而欧拉(Euler)则试图利用积分因子的办法统一处理这一问题. 但实践证明，单纯



变量分离方程
$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$
齐次方程
$\frac{dy}{dx}=-\frac{M_1(x,y)}{N_1(x,y)}=g\left(\frac{y}{x}\right)$
恰当方程
$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$
$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$
线性方程
$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$
伯努利方程
$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n$
$n\neq 0,1$
$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$
$c_1^2+c_2^2\neq 0$
$u=a_ix+b_iy\ (i=1或2)$
$u=\frac{y}{x}$
$y=c(x)e^{\int Pdx}$
$\mu=\frac{1}{\varphi_1(y)}$
$\mu=\frac{1}{xM_1+yN_1}$
$\mu=e^{-\int Pdx}$
$\mu=\frac{1}{y^n}e^{(n-1)\int Pdx}$
$z=y^{1-n}$
坐标平移
$\Delta\neq 0$
$\Delta=0$
$\Delta\equiv\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$

图 (2.7)

采用一种方法各有其不便和困难. 因此，我们必须对具体问题作具体的分析，分别不同情况采用不同的方法.

熟悉各种类型方程的解法，正确而又敏捷地判断一个给定的方程属于何种类型，从而按照所介绍的方法进行求解，这自然是最基本的要求. 但仅仅能做到这一点还不够，因为我们所遇到的方程未必都恰好是本章所介绍过的方程类型，因此还要求注意学习解题的技巧，从中总结经验，培养自己的机智和灵活性；还有一点也很重要，就是要善于根据方程的特点，引进适宜的变换，将方程化为能求解的新类型，从而求解。

最后，我们要强调指出：能有初等解法的微分方程是很有限的，例如形式上很简单的黎卡提(Riccati)方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

一般就没有初等解法（当然，若我们有办法找到方程的一个特解 $\bar{y}(x)$，则经变换 $y=z+\bar{y}$ 后，方程就变为伯努利方程，因而可解）. 这一事实为法国数学家刘维尔(Liouville) 在 1841 年所证明，这就促使人们寻求别的方法来研究微分方程的问题.

习 题 2.5

求下列方程的解:

1. $y\sin x+\frac{dy}{dx}\cos x=1$
2. $ydx-xdy=x^2ydy$
3. $\frac{dy}{dx}=4e^{-y}\sin x-1$
4. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-\sqrt{xy}}$
5. $(xye^{\frac{x}{y}}+y^2)dx-x^2e^{\frac{x}{y}}dy=0$
6. $(xy+1)ydx-xdy=0$

7. $(2x+2y-1)dx+(x+y-2)dy=0$

8. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}$

9. $\frac{dy}{dx}=3y+x-2$

10. $x\frac{dy}{dx}=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

11. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y^2+3}$

12. $e^{-y}\left(\frac{dy}{dx}+1\right)=xe^x$

13. $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$

14. $\frac{dy}{dx}=x+y+1$

15. $\frac{dy}{dx}=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$

16. $(x+1)\frac{dy}{dx}+1=2e^{-y}$

17. $(x-y^2)dx+y(1+x)dy=0$

18. $4x^2y^2dx+2(x^3y-1)dy=0$

19. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y\left(\frac{dy}{dx}\right)+4x=0$

20. $y^2\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=1$

21. $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$

22. $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

23. $ydx-(1+x+y^2)dy=0$

24. $[y-x(x^2+y^2)]dx-xdy=0$

25. $\frac{dy}{dx}+e^{\frac{dy}{dx}}-x=0$

26. $\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)dy=0$

27. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y+4}{4x+6y+5}$

28. $x\frac{dy}{dx}-y=2x^2y(y^2-x^2)$ （提示：令 $x^2y=u$）

29. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=e^{xy}$

30. $\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-2xy^3+2x}{3x^2y^2-6y^5+3y^2}$

31. $y^2(xdx+ydy)+x(ydx-xdy)=0$

（提示：令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$）

32. $\frac{dy}{dx}+\frac{1+xy^3}{1+x^3y}=0$

（提示：令 $u=x+y, v=xy$）

33. 求一曲线，使其切线在纵轴上之截距等于切点的横坐标.

34. 摩托艇以 5 米/秒的速度在静水上运动，全速时停止了发动机，过了 20 秒钟后，艇的速度减至 $v_1=3$ 米/秒. 确定发动机停止 2 分钟后艇的速度. 假定水的阻力与艇的运动速度成正比例.

35. 一质量为 m 的质点作直线运动，从速度等于零的时刻起，有一个和时间成正比（比例系数为 k_1）的力作用在它上面. 此外质点又受到介质的阻力，这阻力和速度成正比（比例系数为 k_2）. 试求此质点的速度与时间的关系.

36. 证明：如果已知黎卡提方程的一个特解，则可用初等解法求得它的通解. 并求解下列方程：

(1) $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$

(2) $y'+y^2-2y\sin x=\cos x-\sin^2 x$

(3) $x^2y'=x^2y^2+xy+1$

(4) $4x^2(y'-y^2)=1$

(5) $x^2(y'+y^2)=2$

(6) $x^2y'+(xy-2)^2=0$

(7) $y'=(x-1)y^2+(1-2x)y+x$

第三章　一阶微分方程的解的存在定理

微分方程来源于生产实际，研究微分方程的目的就在于掌握它所反映的客观规律，能动地解释所出现的各种现象并预测未来的可能情况. 对于反映某一运动规律的微分方程，如果能找出其通解的表达式,一般来说,就能按给定的一定条件相应地选定其中的任意常数，获得所需要的特解并通过其表达式了解它对某些参数的依赖情况,从而适当地选择这些参数，使得对应的解——“运动”具有所需的性能. 在第二章里,我们介绍了能用初等解法的一阶方程的若干类型,但同时指出,大量的一阶方程一般是不能用初等解法求出它的通解的，而实际问题中所需要的往往是要求满足某种初始条件的解. 因此，对初值问题的研究被提到了重要的地位. 自然要问:初值问题的解是否存在?如果存在是否唯一呢?

容易举出解存在而不唯一的例子. 例如方程

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}$$

过点(0,0)的解就是不唯一的. 事实上，易知 $y=0$ 是方程的过点(0,0)的解. 此外,容易验证,$y=x^2$ 或更一般地,函数

$$y=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant c\\(x-c)^2 & c<x\leqslant 1\end{cases}$$

都是方程的过点(0,0)而定义于区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的解,这里 c 是满足 $0<c<1$ 的任一数.

本章介绍的存在唯一性定理完满地回答了上面提出的问题,它明确地肯定了方程的解在一定条件下的存在性和唯一性，它是常微分方程理论中最基本的定理，有其重大的理论意义. 另一方

面，由于能求得精确解的微分方程为数不多，微分方程的近似解法具有十分重大的实际意义，而解的存在和唯一又是进行近似计算的前提．因为如果解根本不存在，却要去近似地求它，问题本身是没有意义的；如果有解存在而不唯一，由于不知道要确定是哪一个解，却要去近似地确定它，问题也是不明确的．解的存在唯一性定理保证了所要求的解的存在和唯一，因此它也是近似求解法的前提和理论基础．此外，我们将看到在定理的证明过程中还具体地提供了求近似解的途径，这就更增添了存在唯一性定理的实用意义．

由于种种条件的限制，实际测出的初始数据往往是不精确的，它只能近似地反映初始状态．因此我们以它作为初始条件所得到的解是否能用作真正的解呢？这就产生了解对初始值的连续依赖性问题，即当初始值微小变动时，方程的解的变化是否也是很小呢？如果不然的话，这样所求得的解就失去实用的意义，因它可能与实际情况产生很大的误差．

本章重点介绍和证明一阶方程的解的存在唯一性定理．并叙述解的一些一般性质，如解的延拓、解对初值的连续性和可微性等．此外，还引进奇解的概念及介绍求奇解的两个方法．

§3.1 解的存在唯一性定理与逐步逼近法

3.1.1 存在唯一性定理

1) 首先考虑导数已解出的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{3.1}$$

这里 $f(x,y)$ 是在矩形域

$$R:\ |x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b \tag{3.2}$$

上的连续函数.

函数 $f(x,y)$ 称为在 R 上关于 y 满足**利普希茨(Lipschitz)条件**,如果存在常数 $L>0$,使得不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|$$

对于所有 (x,y_1), $(x,y_2)\in R$ 都成立. L 称为**利普希茨常数**.

定理 1 如果 $f(x,y)$ 在 R 上连续且关于 y 满足利普希茨条件,则方程(3.1)存在唯一的解 $y=\varphi(x)$,定义于区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上,连续且满足初始条件

$$\varphi(x_0)=y_0 \tag{3.3}$$

这里 $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$, $M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$.

我们采用皮卡(Picard)的逐步逼近法来证明这个定理. 为了简单起见,只就区间 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 来讨论,对于 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0$ 的讨论完全一样.

现在简单叙述一下运用逐步逼近法证明定理的主要思想. 首先证明求微分方程的初值问题的解等价于求积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx$$

的连续解. 然后去证明积分方程的解的存在唯一性.

任取一个连续函数 $\varphi_0(x)$ 代入上面积分方程右端的 y,就得到函数

$$\varphi_1(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_0(x))dx$$

显然 $\varphi_1(x)$ 也是连续函数,如果 $\varphi_1(x)\equiv\varphi_0(x)$,那末 $\varphi_0(x)$ 就是积分方程的解. 否则,我们又把 $\varphi_1(x)$ 代入积分方程右端的 y,得到

$$\varphi_2(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_1(x))dx$$

如果 $\varphi_2(x)\equiv\varphi_1(x)$,那末 $\varphi_1(x)$ 就是积分方程的解. 否则,我们继

续这个步骤. 一般地作函数

$$\varphi_n(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))\,dx \tag{3.4}$$

这样就得到连续函数序列:

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x),\ \cdots$$

如果 $\varphi_{n+1}(x) \equiv \varphi_n(x)$, 那末 $\varphi_n(x)$ 就是积分方程的解. 如果始终不发生这种情况, 我们可以证明上面的函数序列有一个极限函数 $\varphi(x)$, 即

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

存在, 因而对(3.4)取极限时, 就得到

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) &= y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))\,dx \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(x, \varphi_{n-1}(x))\,dx \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,dx
\end{aligned}$$

即

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,dx$$

这就是说, $\varphi(x)$ 是积分方程的解. 这种一步一步地求出方程的解的方法就称为**逐步逼近法**. 由(3.4) 确定的函数 $\varphi_n(x)$ 称为初值问题(3.1)、(3.3)的**第 n 次近似解**. 在定理的假设条件下, 以上的步骤是可以实现的. 下面我们分五个命题来证明定理.

命题 1 设 $y=\varphi(x)$ 是方程(3.1)的定义于区间 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$ 上, 满足初始条件

$$\varphi(x_0) = y_0 \tag{3.3}$$

的解, 则 $y=\varphi(x)$ 是积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h \tag{3.5}$$

的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的连续解. 反之亦然.

证明 因为 $y=\varphi(x)$ 是方程(3.1)的解, 故有

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f(x,\varphi(x))$$

两边从 x_0 到 x 取定积分得到

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\equiv\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi(x))dx \qquad x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$$

把(3.3)代入上式, 即有

$$\varphi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi(x))dx \qquad x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$$

因此, $y=\varphi(x)$ 是(3.5)的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的连续解.

反之, 如果 $y=\varphi(x)$ 是(3.5)的连续解, 则有

$$\varphi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi(x))dx \qquad x_0\leqslant x\leqslant x_0+h \tag{3.6}$$

微分之, 得到

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f(x,\varphi(x))$$

又把 $x=x_0$ 代入(3.6), 得到

$$\varphi(x_0)=y_0$$

因此, $y=\varphi(x)$ 是方程(3.1)的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上, 且满足初始条件(3.3)的解. 命题 1 证毕.

现在取 $\varphi_0(x)=y_0$, 构造皮卡逐步逼近函数序列如下:

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0\\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi \quad x_0\leqslant x\leqslant x_0+h\end{cases} \tag{3.7}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

命题 2 对于所有的 n, (3.7)中函数 $\varphi_n(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义、连续且满足不等式

$$|\varphi_n(x)-y_0|\leqslant b \tag{3.8}$$

证明 当 $n=1$ 时，$\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi$. 显然 $\varphi_1(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义、连续且有

$$|\varphi_1(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi\right|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi, y_0|d\xi$$
$$\leqslant M(x-x_0)\leqslant Mh\leqslant b$$

即命题 2 当 $n=1$ 时成立. 现在我们用数学归纳法证明对于任何正整数 n，命题 2 都成立. 为此，设命题 2 当 $n=k$ 时成立，也即 $\varphi_k(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义、连续且满足不等式

$$|\varphi_k(x)-y_0|\leqslant b$$

这时，

$$\varphi_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi))d\xi$$

由假设，命题 2 当 $n=k$ 时成立，知道 $\varphi_{k+1}(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义、连续且有

$$|\varphi_{k+1}(x)-y_0|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi, \varphi_k(\xi))|d\xi\leqslant M(x-x_0)\leqslant Mh\leqslant b$$

即命题 2 当 $n=k+1$ 时也成立. 由数学归纳法得知命题 2 对于所有 n 均成立. 命题 2 证毕.

命题 3 函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上是一致收敛的.

证明 我们考虑级数

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)] \qquad x_0\leqslant x\leqslant x_0+h \tag{3.9}$$

它的部分和为

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]=\varphi_n(x)$$

因此，要证明函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛，只须证明级数 (3.9) 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛. 为此，我们进行如

下的估计. 由(3.7)有

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_0(\xi))|d\xi\leqslant M(x-x_0) \tag{3.10}$$

及

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_1(\xi))-f(\xi,\varphi_0(\xi))|d\xi$$

利用利普希茨条件及(3.10),得到

$$\begin{aligned}|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|&\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(\xi)-\varphi_0(\xi)|d\xi\\&\leqslant L\int_{x_0}^{x}M(\xi-x_0)d\xi=\frac{ML}{2!}(x-x_0)^2\end{aligned}$$

设对于正整数 n, 不等式

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant\frac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n$$

成立,则由利普希茨条件,当 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 时,有

$$\begin{aligned}|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|&\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))|d\xi\\&\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|d\xi\\&\leqslant\frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)^n d\xi=\frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\end{aligned}$$

于是,由数学归纳法得知,对于所有的正整数 k, 有如下的估计

$$|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)|\leqslant\frac{ML^{k-1}}{k!}(x-x_0)^k \qquad x_0\leqslant x\leqslant x_0+h \tag{3.11}$$

从而可知,当 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 时

$$|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)|\leqslant\frac{ML^{k-1}}{k!}h^k \tag{3.12}$$

(3.12)的右端是正项收敛级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}ML^{k-1}\frac{h^k}{k!}$$

的一般项. 由维尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法(简称维氏判别法),级数(3.9)在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛,因而序列$\{\varphi_n(x)\}$也在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛. 命题3证毕.

现设

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$$

则 $\varphi(x)$也在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上连续,且由(3.8)又可知

$$|\varphi(x)-y_0|\leqslant b$$

命题4 $\varphi(x)$是积分方程(3.5)的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的连续解.

证明 由利普希茨条件

$$|f(x,\varphi_n(x))-f(x,\varphi(x))|\leqslant L|\varphi_n(x)-\varphi(x)|$$

以及$\{\varphi_n(x)\}$在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$,即知序列

$$\{f_n(x)\}\equiv\{f(x,\varphi_n(x))\}$$

在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛于 $f(x,\varphi(x))$. 因而,对(3.7)两边取极限,得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)&=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi\\&=y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi\end{aligned}$$

即

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))d\xi$$

这就是说,$\varphi(x)$是积分方程(3.5)的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的连续解. 命题4证毕.

命题5 设 $\psi(x)$是积分方程(3.5)的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的一个连续解,则 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$, $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$.

证明 我们首先证明 $\psi(x)$也是序列$\{\varphi_n(x)\}$的一致收敛极限函数. 为此,从

$$\varphi_0(x)=y_0$$

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi \quad (n\geqslant 1)$$

$$\psi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\psi(\xi))d\xi$$

我们可以进行如下的估计

$$|\varphi_0(x)-\psi(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\psi(\xi))|d\xi\leqslant M(x-x_0)$$

$$|\varphi_1(x)-\psi(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_0(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))|d\xi$$

$$\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_0(\xi)-\psi(\xi)|d\xi$$

$$\leqslant ML\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)d\xi=\frac{ML}{2!}(x-x_0)^2$$

现设$|\varphi_{n-1}(x)-\psi(x)|\leqslant\dfrac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n$，则有

$$|\varphi_n(x)-\psi(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))|d\xi$$

$$\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_{n-1}(\xi)-\psi(\xi)|d\xi$$

$$\leqslant\frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)^n d\xi$$

$$=\frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

故由数学归纳法得知，对于所有的正整数 n，有下面的估计式

$$|\varphi_n(x)-\psi(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{3.13}$$

因此，在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有

$$|\varphi_n(x)-\psi(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1} \tag{3.14}$$

$\dfrac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}$ 是收敛级数的公项，故 $n\to\infty$ 时$\dfrac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}\to 0$. 因

而$\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$ 上一致收敛于 $\psi(x)$. 根据极限的唯一性，即得

$$\varphi(x) \equiv \psi(x) \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$$

命题 5 证毕.

综合命题 1—5，即得到存在唯一性定理的证明.

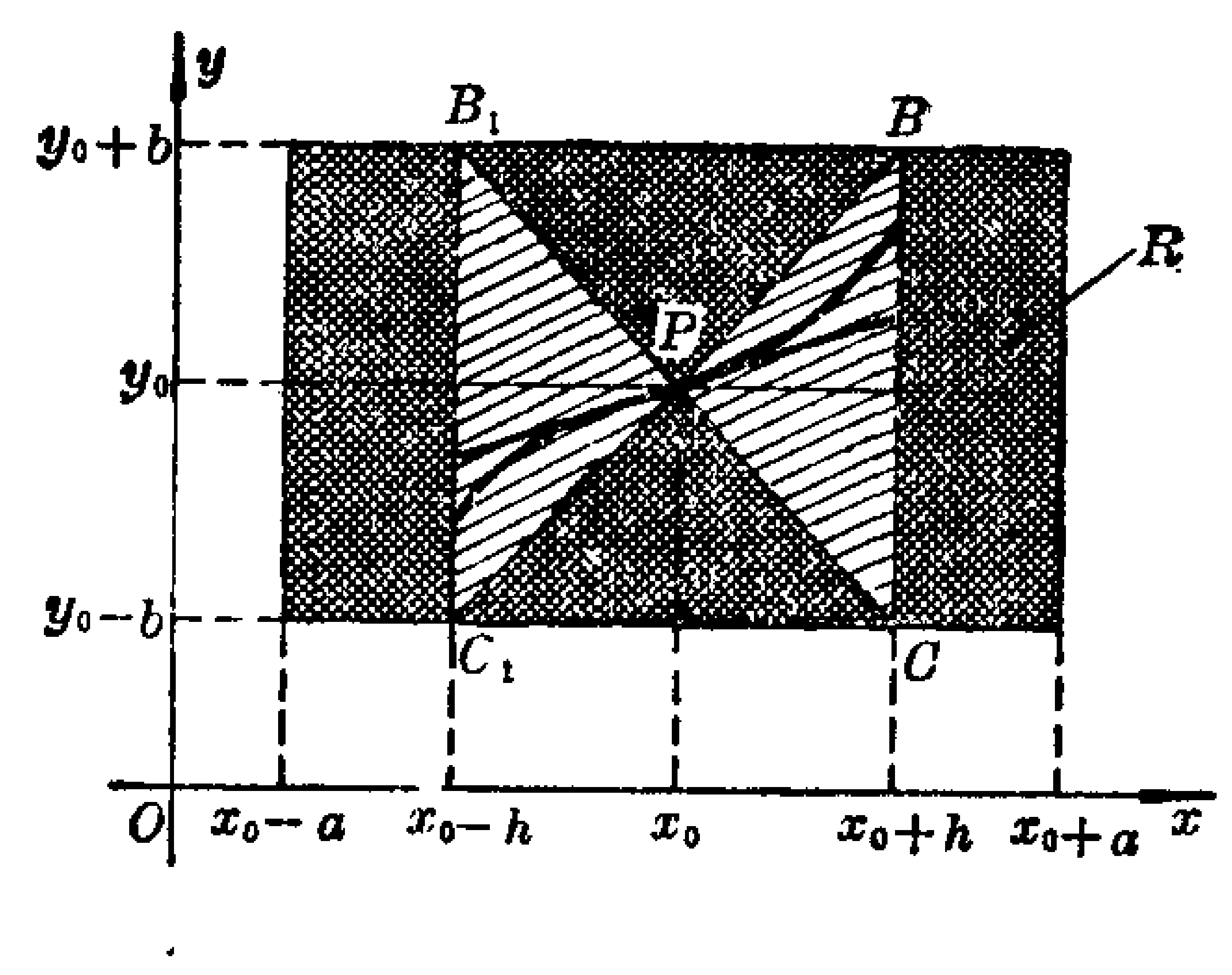


图 (3.1)

附注 1 存在唯一性定理中数 h 的几何意义（参看图(3.1)）：这里 $h=\frac{b}{M}$，定理证明方程(3.1) 的过点(x_0, y_0)的积分曲线 $y=\varphi(x)$ 在区间 $|x-x_0| \leqslant h$ 上确定. 因为积分曲线的切线斜率介于直线 BC_1 和 B_1C 的斜率M与$-M$之间. 所以，当$|x-x_0| \leqslant h$ 时，积分曲线上的点$(x, \varphi(x))$的纵坐标满足不等式

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|\varphi(x)-y_0| \leqslant M|x-x_0| \leqslant b$$

也就是说，积分曲线弧夹在域 B_1PC_1 及 BPC 的内部，当然，也就不超出矩形 R. 命题 2 中所有函数 $y=\varphi_n(x)$ 都可在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$ 上确定，它的图形都夹在域 BPC 的内部，自然，它的极限图形即积分曲线 $y=\varphi(x)$也不超出域 BPC 的范围.

附注 2 由于利普希茨条件比较难于检验，常用$f(x, y)$在R上有对 y 的连续偏导数来代替. 事实上，如果在 R 上$\frac{\partial f}{\partial y}$存在且连

续，则$\frac{\partial f}{\partial y}$在$R$上有界．设在$R$上$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant L$，这时

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\frac{\partial f(x,y_2+\theta(y_1-y_2))}{\partial y}\right||y_1-y_2|$$

$$\leqslant L|y_1-y_2|$$

这里(x,y_1)，$(x,y_2)\in R$，$0<\theta<1$．但反过来满足利普希茨条件的函数$f(x,y)$不一定有偏导数存在．例如，函数$f(x,y)=|y|$在任何区域都满足利普希茨条件，但它在$y=0$处没有导数．

附注 3　设方程(3.1)是线性的，即方程为

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x) \tag{2.28}$$

那么容易知道，当$P(x)$，$Q(x)$在区间$[\alpha,\beta]$上为连续时，定理 1 的条件就能满足．

不仅如此，这时由任一初值(x_0,y_0)，$x_0\in[\alpha,\beta]$所确定的解在整个区间$[\alpha,\beta]$上都有定义．

事实上，对于一般方程(3.1)，由初始值所确定的解只能定义在$|x-x_0|\leqslant h$上，这是因为在构造逐步逼近函数序列$\{\varphi_n(x)\}$时，要求它不越出原来的矩形区域R．而现在，右端函数对y没有任何限制，为了证明我们的结论，譬如取$M=\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|P(x)y_0+Q(x)|$，而逐字重复定理的证明过程，即可证由(3.7)所作出的函数序列$\{\varphi_n(x)\}$在整个区间$[\alpha,\beta]$上都有定义和一致收敛．

2）现在考虑一阶隐方程

$$F(x,y,y')=0 \tag{3.15}$$

根据隐函数存在定理，若于(x_0,y_0,y'_0)的某一领域内F连续且$F(x_0,y_0,y'_0)=0$、而$\frac{\partial F}{\partial y'}\neq0$，则必可把$y'$唯一地表为$x$，$y$的函数

$$y'=f(x,y) \tag{3.16}$$

并且 $f(x,y)$ 于 (x_0,y_0) 的某一邻域内连续，且满足

$$y'_0=f(x_0,y_0)$$

更进一步，如果 F 关于所有变元存在连续偏导数，则 $f(x,y)$ 对 x、y 也存在连续偏导数，并且

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial y'} \tag{3.17}$$

显然它是有界的．于是依定理 1，方程(3.16)满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解存在且唯一，即方程(3.15)的过点 (x_0, y_0) 且切线斜率为 y'_0 的积分曲线存在且唯一①．这样便得到下面的定理．

定理 2 如果在点 (x_0,y_0,y'_0) 的某一邻域中：

1° $F(x,y,y')$ 对所有变元 (x,y,y') 连续，且存在连续偏导数；

2° $F(x_0,y_0,y'_0)=0$

3° $\dfrac{\partial F(x_0,y_0,y'_0)}{\partial y'}\neq 0$

则方程(3.15)存在唯一解

$$y=y(x)\quad |x-x_0|\leqslant h\quad (h\text{ 为足够小的正数})$$

满足初始条件

$$y(x_0)=y_0,\qquad y'(x_0)=y'_0 \tag{3.18}$$

3.1.2 近似计算和误差估计

存在唯一性定理不仅肯定了解的存在唯一性，并且在证明中所采用的逐步逼近法在实用上也是求方程近似解的一种方法．在估计式(3.14)中令 $\psi(x)=\varphi(x)$，我们就得到第 n 次近似解 $\varphi_n(x)$ 和真正解 $\varphi(x)$ 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 内的误差估计式

---

① 这里关于解的存在唯一性是这样理解的：对任意给定的一组值 (x_0,y_0,y'_0)，$F(x_0,y_0,y'_0)=0$，方程(3.15)的沿已给方向 y'_0 通过点 (x_0,y_0) 的积分曲线有且只有一条．

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1} \tag{3.19}$$

这样，我们在进行近似计算时，可以根据误差的要求，选取适当的逐步逼近函数 $\varphi_n(x)$.

例 1 方程$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$定义在矩形域 R: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$ 上，试利用存在唯一性定理确定经过点 (0, 0) 的解的存在区间，并求在此区间上与真正解的误差不超过 0.05 的近似解的表达式.

解 这里$M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=2$, h 是 $a=1$ 及$\frac{b}{M}=\frac{1}{2}$二数中的最小者，故 $h=\frac{1}{2}$，在R上函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 的利普希茨常数可取为 $L=2$，因为

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=|2y|\leqslant 2=L$$

根据(3.19)

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}=\frac{M}{L}\frac{1}{(n+1)!}(Lh)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}<0.05$$

因而可取 $n=3$. 事实上，$\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}<\frac{1}{20}=0.05$. 我们可以作出如下的近似表达式

$$\varphi_0(x)=0$$

$$\varphi_1(x)=\int_0^x[x^2+\varphi_0^2(x)]dx=\frac{x^3}{3}$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x[x^2+\varphi_1^2(x)]dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}$$

$$\varphi_3(x)=\int_0^x[x^2+\varphi_2^2(x)]dx$$

$$=\int_0^x\left(x^2+\frac{x^6}{9}+\frac{2x^{10}}{189}+\frac{x^{14}}{3969}\right)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535}$$

$\varphi_3(x)$就是所求的近似解. 在区间$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$上，这个解与真正解的误差不会超过 0.05.

习　题　3.1

1. 求方程$\frac{dy}{dx}=x+y^2$ 通过点(0, 0)的第三次近似解。

2. 求方程$\frac{dy}{dx}=x-y^2$ 通过点(1, 0)的第二次近似解。

3. 求初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=x^2-y^2 & R:\ |x+1|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1\\ y(-1)=0\end{cases}$$

的解的存在区间，并求第二次近似解. 给出在解的存在区间的误差估计.

4. 讨论方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$$

在怎样的区域中满足解的存在唯一性定理的条件. 并求通过点(0, 0)的一切解.

5. 叙述并用逐步逼近法证明关于一阶线性微分方程的解的存在唯一性定理.

6. 证明格朗瓦耳(Gronwall)不等式:

设K为非负常数，$f(t)$和$g(t)$为在区间$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上的连续非负函数，且满足不等式

$$f(t)\leqslant K+\int_\alpha^t f(s)g(s)ds,\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

则有

$$f(t)\leqslant K\exp\left(\int_\alpha^t g(s)ds\right),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

并由此证明定理 1 的命题 5．

7．假设函数 $f(x, y)$ 于 (x_0, y_0) 的邻域内是 y 的不增函数，试证方程 (3.1) 满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解于 $x\geqslant x_0$ 一侧最多只有一个．

8．如果函数 $f(x, y)$ 于带域 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上连续且关于 y 满足利普希茨条件，则方程 (3.1) 满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解于整个区间 $[\alpha, \beta]$ 上存在且唯一．试证明之．

（提示：用逐步逼近法，取 $M=\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x, y_0)|$．）

9．设 $f(x)$ 定义于 $-\infty<x<+\infty$，满足条件

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant N|x_1-x_2|$$

其中 $N<1$，证明方程

$$x=f(x)$$

存在唯一的一个解．

（提示：任取 x_0，作逐步逼近点列 $x_{n+1}=f(x_n)$，$n=0, 1, 2, \cdots$，然后证明 x_n 收敛于方程的唯一解．）

10．给定积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi \qquad (*)$$

其中 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的已知连续函数，$K(x, \xi)$ 是 $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant\xi\leqslant b$ 上的已知连续函数．证明当 $|\lambda|$ 足够小时（λ 是常数），(*) 在 $[a, b]$ 上存在唯一的连续解．

（提示：作逐步逼近函数序列

$$\varphi_0(x)=f(x)$$

$$\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x, \xi)\varphi_n(\xi)d\xi \quad n=0, 1, 2\cdots)$$

§3.2 解的延拓

§3.1 中解的存在唯一性定理是局部性的，它只肯定了解至少在区间 $|x-x_0|\leqslant h$, $h=\min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$ 上存在．可能出现这样的情况，即随着 $f(x, y)$ 定义区域的增大，我们能肯定的解存在的区间反而

缩小. 例如, 3.1.2 中的例 1, 当定义区域为 R: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$ 时, $h=\frac{1}{2}$; 当定义区域为 R: $-2\leqslant x\leqslant 2$, $-2\leqslant y\leqslant 2$时, $M=8$, $h=\min\left(2,\frac{2}{8}\right)=\frac{1}{4}$. 这种局部性使我们感到非常不满意, 而且实践上也要求解的存在区间能尽量扩大, 解的延拓的概念就自然产生了. 下面讨论解的延拓的概念, 通过它我们可以将 §3.1 中存在唯一性定理中的局部结果变为适用于较大的范围.

假设方程(3.1)右端函数 $f(x,y)$ 在某一区域 G 内连续, 且关于 y 满足局部的利普希茨条件, 即对于区域 G 内的每一点, 有以其为中心的完全含于 G 内的闭矩形 R 存在, 在 R 上 $f(x,y)$ 关于 y 满足利普希茨条件(对于不同的点, 域 R 的大小和常数 L 可能不同).

设方程(3.1)的解 $y=\varphi(x)$ 已定义在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上, 现在取 $x_1=x_0+h$, 然后以 (x_1,y_1) 为中心, (这里 $(x_1,\ y_1)$ 即图(3.2)中的

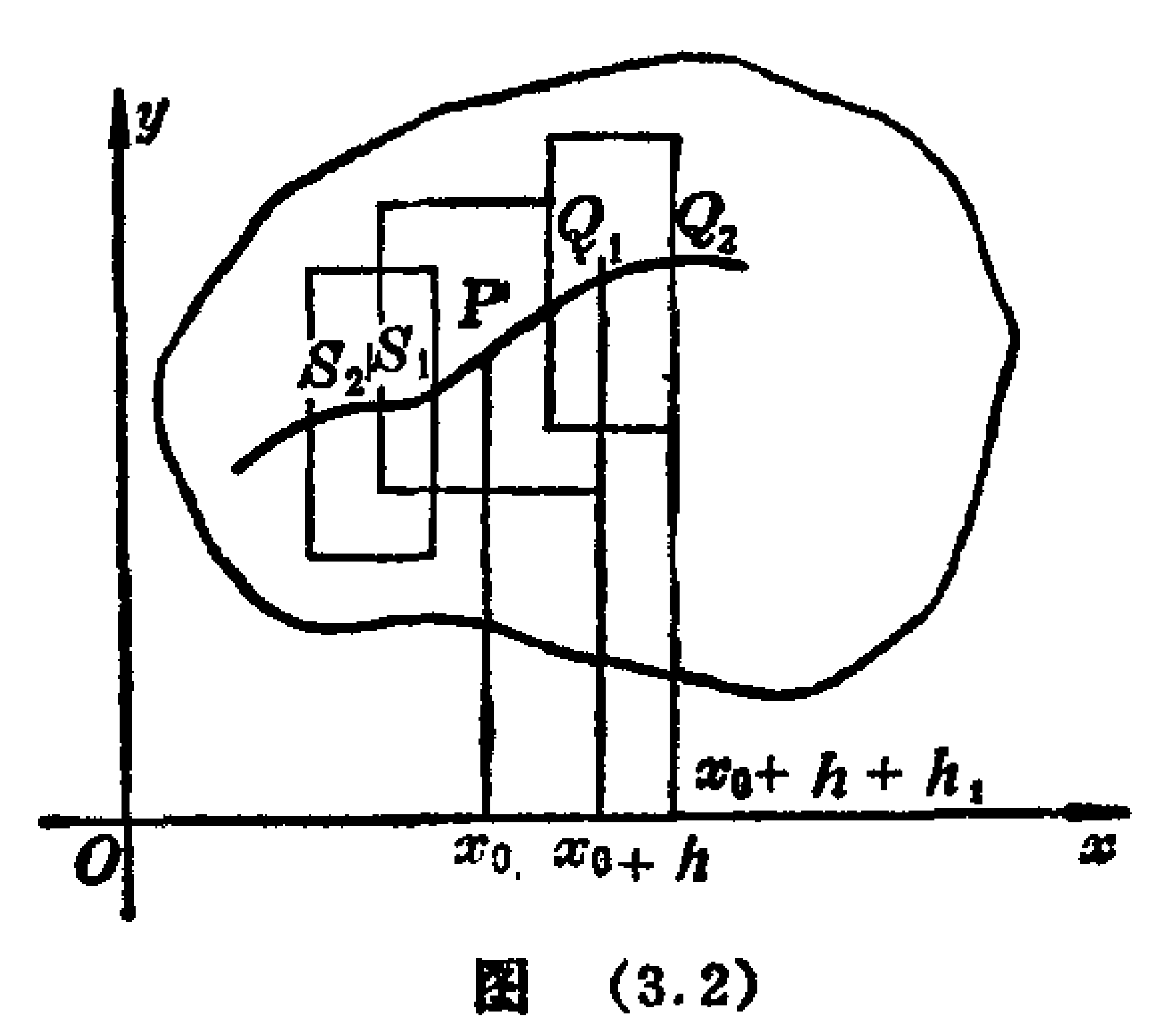


图 (3.2)

Q_1点, $y_1=\varphi(x_0+h)$)作一小的矩形, 使它连同其边界都含在区域 G 的内部. 再运用 § 3.1 中的存在唯一性定理, 知道存在 $h_1>0$, 使得在区间 $|x-x_1|\leqslant h_1$ 上, 方程(3.1)有过 (x_1,y_1) 的解 $y=\psi(x)$, 且在 $x=x_1$ 处有 $\psi(x_1)=\varphi(x_1)$. 由于唯一性, 显然在解 $y=\psi(x)$ 和解 $y=\varphi(x)$ 都有定义的区间 $x_1-h_1\leqslant x\leqslant x_1$ 上, $\psi(x)\equiv\varphi(x)$. 但是在区间 $x_1\leqslant x\leqslant x_1+h_1$ 上, 解 $y=\psi(x)$ 仍有定义, 我们把它看成

是原来定义在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上的解 $y=\varphi(x)$ 向右方的延拓，这样，我们就在区间 $[x_0-h, x_0+h+h_1]$ 上确定方程的一个解

$$y=\begin{cases}\varphi(x), & x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h\\ \psi(x), & x_0+h< x\leqslant x_0+h+h_1\end{cases}$$

即将解延拓到较大的区间 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h+h_1$ 上．再令 $x_2=x_1+h_1$, $y_2=\psi(x_1+h_1)$，如果 $(x_2, y_2)\in G$，我们又可以取 (x_2, y_2) 为中心，作一小矩形，使它连同其边界都含在区域 G 内．仿前，又可以将解延拓到更大的区间 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_2+h_2=x_0+h+h_1+h_2$ 上，其中 h_2 是某一个正常数．对于 x 值减小的一边可以同样讨论，使解向左方延拓．用几何的语言来说，上述解的延拓，就是在原来的积分曲线 $y=\varphi(x)$ 左右两端各接上一个积分曲线段（参看图(3.2)）．上述解的延拓的办法还可继续进行，最后我们将得到一个解 $y=\tilde{\varphi}(x)$，它已经再也不能向左右方继续延拓了．这样的解称为方程(3.1)的**饱和解**．任一饱和解 $y=\tilde{\varphi}(x)$ 的最大存在区间必定是一个开区间 $\alpha<x<\beta$．因为如果这个区间的右端是闭的，那么 β 便是有限数，且点 $(\beta, \tilde{\varphi}(\beta))\in G$．这样一来，解 $y=\tilde{\varphi}(x)$ 就还能继续向右方延拓，从而它是非饱和的．对左端点 α 可同样讨论．我们要问，究竟解 $y=\varphi(x)$ 向两边延拓的最终情况如何呢？这一问题可以由下面的解的延拓定理来回答．

现在我们不加证明地引进下面的定理．

解的延拓定理 如果方程(3.1)右端的函数 $f(x, y)$ 在有界区域 G 中连续，且在 G 内关于 y 满足局部的利普希茨条件，那末方程(3.1)的通过 G 内任何一点 (x_0, y_0) 的解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓，直到点 $(x, \varphi(x))$ 任意接近区域 G 的边界．以向 x 增大的一方的延拓来说，如果 $y=\varphi(x)$ 只能延拓到区间 $x_0\leqslant x<m$ 上，则当 $x\to m$ 时，$(x, \varphi(x))$ 趋于区域 G 的边界．

推论 如果 G 是无界区域，在上面解的延拓定理的条件下，方

程(3.1)的通过点(x_0, y_0)的解$y=\varphi(x)$可以延拓，以向x增大的一方的延拓来说，有下面的两种情况：

(1) 解$y=\varphi(x)$可以延拓到区间$[x_0, +\infty)$；

或

(2) 解$y=\varphi(x)$只可以延拓到区间$[x_0, m)$，其中m为有限数，则当$x\to m$时，或者$y=\varphi(x)$无界，或者点$(x, \varphi(x))$趋于区域G的边界.

例1 讨论方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-1}{2}$的分别通过点$(0,0)$、$(\ln 2, -3)$的解的存在区间.

解 此方程右端函数确定在整个xy平面上且满足解的存在唯一性定理及解的延拓定理的条件.容易确定此方程的通解为$y=(1+ce^x)/(1-ce^x)$.故通过点$(0,0)$的解为$y=(1-e^x)/(1+e^x)$，这个解的存在区间为$-\infty<x<+\infty$. 通过点$(\ln 2, -3)$的解为$y=(1+e^x)/(1-e^x)$，这个解的存在区间为$0<x<+\infty$（参看图(3.3)）. 注意，通过点$(\ln 2, -3)$的解$y=(1+e^x)/(1-e^x)$向右方可以延拓到$+\infty$，但对于x减少的一方来说，向左方只能延拓到0，

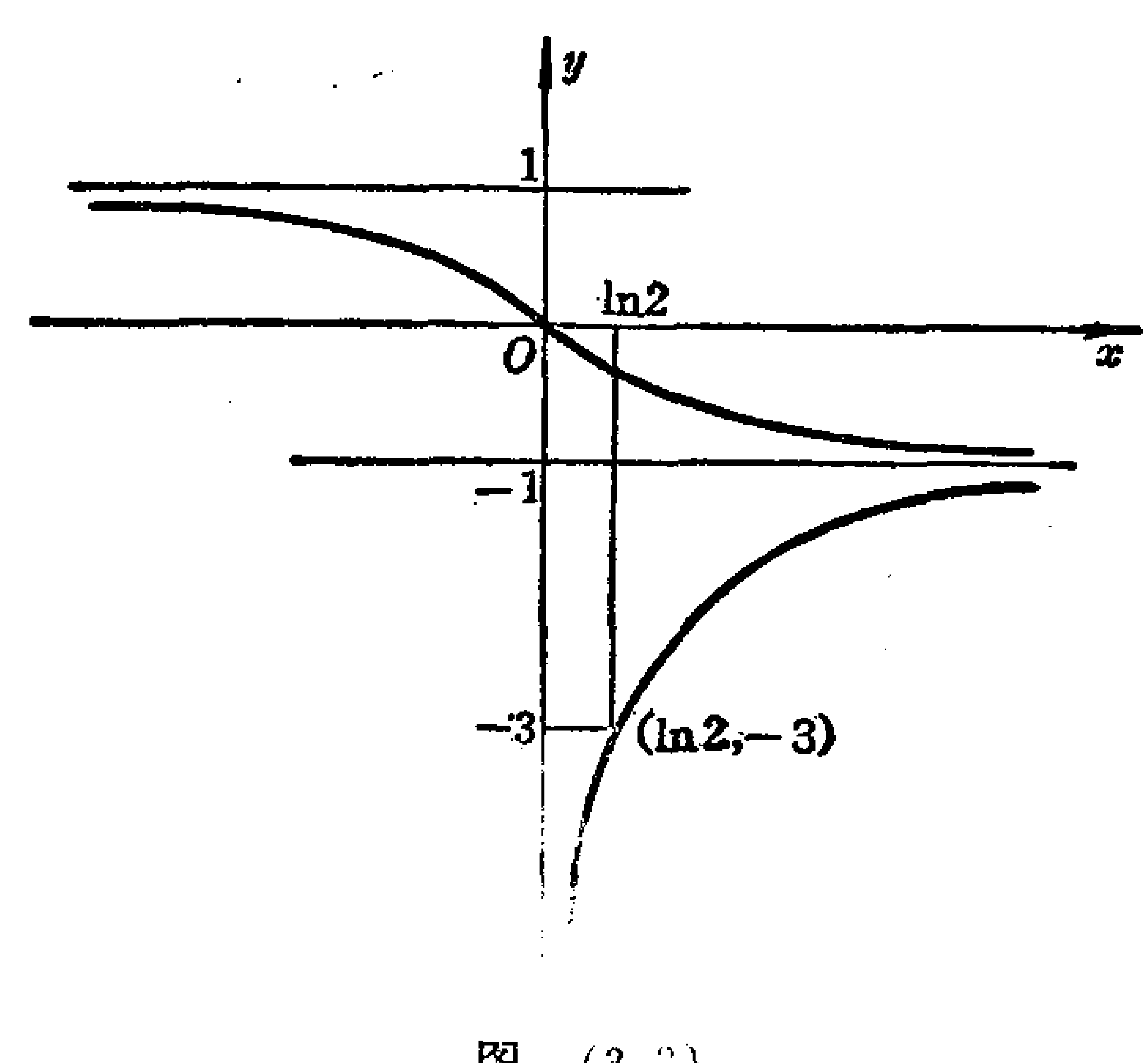


图 (3.3)

因为当 $x \to 0_+$ 时，$y \to -\infty$. 这相当于解的延拓定理推论中(2)的第一种情况.

例 2 讨论方程 $\frac{dy}{dx}=1+\ln x$ 满足条件 $y(1)=0$ 的解的存在区间.

解 方程右端函数于右半平面 $x>0$ 上定义且满足解的延拓定理的条件. 这里区域 G(右半平面) 是无界开域，y 轴是它的边界. 容易求得问题的解 $y=x\ln x$, 它于区间 $0<x<+\infty$ 上定义、连续且当 $x\to 0$ 时 $y\to 0$, 即所求问题的解向右方可以延拓到 $+\infty$, 但向左方只能延拓到 0, 且当 $x\to 0$ 时积分曲线上的点(x, y)趋向于区域 G 的边界上的点，这对应于延拓定理推论中 (2) 的第二种情况.

最后我们指出，应用上述定理推论的结果不难证明: 如果函数 $f(x,y)$ 于整个 xy 平面上定义、连续和有界，同时存在关于 y 的一阶连续偏导数，则方程(3.1)的任一解均可以延拓到区间 $-\infty<x<+\infty$.

§ 3.3 解对初值的连续性和可微性定理

在 § 3.1 存在唯一性定理的证明中，我们把初值(x_0, y_0)看作固定的. 显然，假如(x_0, y_0)变动，则相应的初值问题的解也将随之变动，也就是说，初值问题的解不单依赖于自变量 x，同时也依赖于初值(x_0, y_0). 因此，在考虑初值变动时，解可以看作三个变元的函数而记为

$$y=\varphi(x, x_0, y_0)$$

它满足 $y_0=\varphi(x_0, x_0, y_0)$.

下面我们着重讨论解关于初值的一些基本性质.

解关于初值的对称性 设方程(3.1)的满足初始条件 $y(x_0)=$

y_0 的解是唯一的，记为 $y=\varphi(x, x_0, y_0)$，则在此表达式中，(x, y) 与 (x_0, y_0) 可以调换其相对位置，即在解的存在范围内成立着关系式

$$y_0=\varphi(x_0, x, y)$$

事实上，在上述解的存在区间内任取一值 x_1，且记 $y_1=\varphi(x_1, x_0, y_0)$，则由解的唯一性知过点 (x_1, y_1) 的解与过点 (x_0, y_0) 的解是同一条积分曲线，即此解也可写为

$$y=\varphi(x, x_1, y_1),$$

并且，显然有 $y_0=\varphi(x_0, x_1, y_1)$. 注意到点 (x_1, y_1) 是积分曲线上任意一点，因此关系式 $y_0=\varphi(x_0, x, y)$ 对该积分曲线上的任意点 (x, y) 均成立，这就证实了我们的论断.

解对初值的连续依赖性　方程

$$\frac{dy}{dx}=y$$

满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=y_0 e^{x-x_0}$ 明显地是自变量 x 和初值 x_0, y_0 的三元函数，并且关于 x, x_0, y_0 是连续和可微的. 下面我们将从理论上来论证这一事实.

首先我们证明下面的引理.

引理　如果函数 $f(x, y)$ 于某域 D 内连续，且关于 y 满足利普希茨条件（利普希茨常数为 L），则对方程（3.1）的任意两个解 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$，在它们公共存在的区间内成立着不等式

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leqslant |\varphi(x_0)-\psi(x_0)| e^{L|x-x_0|} \qquad (3.20)$$

其中 x_0 为所考虑区间内的某一值.

证明　设 $\varphi(x), \psi(x)$ 于区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上均有定义，令

$$V(x)=[\varphi(x)-\psi(x)]^2, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

则

$$V'(x)=2[\varphi(x)-\psi(x)][f(x, \varphi)-f(x, \psi)] \leqslant 2LV(x)$$

于是

$$\frac{d}{dx}(V(x)e^{-2Lx})\leqslant 0$$

因此，对 $x_0\in[a,b]$，有

$$V(x)\leqslant V(x_0)e^{2L(x-x_0)},\ x_0\leqslant x\leqslant b$$

对于区间 $a\leqslant x\leqslant x_0$，令 $-x=t$，并记 $-x_0=t_0$，则方程(3.1)变为

$$\frac{dy}{dt}=-f(-t,y)$$

并且已知它有解 $y=\varphi(-t)$ 和 $y=\psi(-t)$。

类似上述推演过程，令 $\sigma(t)=[\varphi(-t)+\psi(-t)]^2$，可得

$$\sigma(t)\leqslant\sigma(t_0)e^{2L(t-t_0)},\ t_0\leqslant t\leqslant -a$$

注意到 $\sigma(t)|_{t=-x}=V(x)$ 及 $\sigma(t_0)=V(x_0)$，就有

$$V(x)\leqslant V(x_0)e^{2L(x_0-x)},\quad a\leqslant x\leqslant x_0$$

因此

$$V(x)=V(x_0)e^{2L|x-x_0|},\ a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant x_0\leqslant b$$

两边取平方根即得(3.20)。

解对初值的连续依赖定理 假设 $f(x,\ y)$ 于域 G 内连续且关于 y 满足局部利普希茨条件，$(x_0,\ y_0)\in G$，$y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是方程(3.1)的满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解，它于区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有定义($a\leqslant x_0\leqslant b$)，那末，对任意给定的 $\varepsilon>0$，必能找到正数 $\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$，使得当

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2$$

时，方程(3.1)的满足条件 $y(\bar{x}_0)=\bar{y}_0$ 的解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\ \bar{y}_0)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上也有定义，并且

$$|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|<\varepsilon,\ a\leqslant x\leqslant b$$

(参看图(3.4))，

证明 首先，注意到积分曲线段 $S: y=\varphi(x,\ x_0,y_0)\equiv\varphi(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$ 是 xy 平面上一个有界闭集，又按假定对 S 上每一点 (x,y)

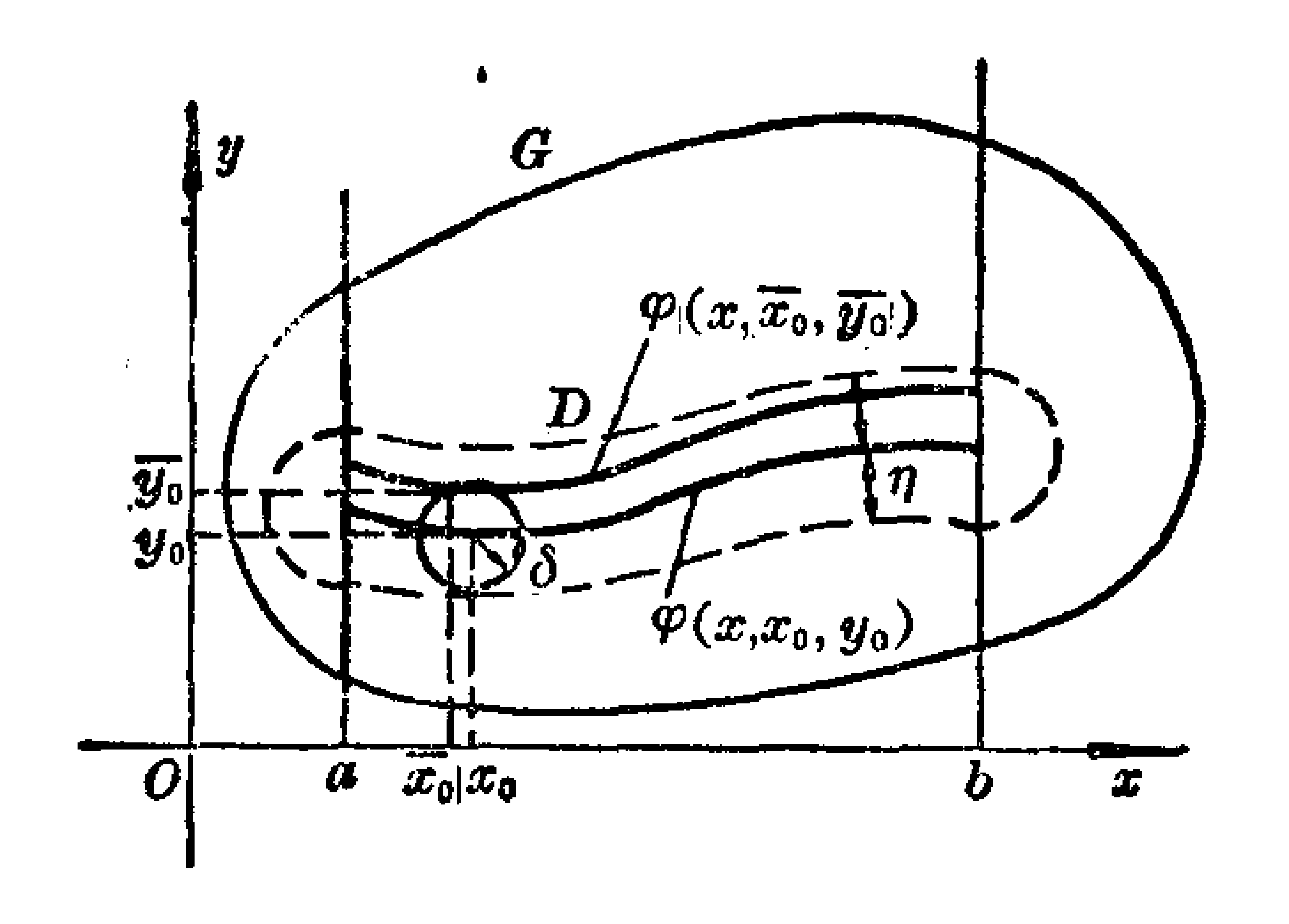


图 (3.4)

必存在一个以它为中心的开圆C, $C\subset G$, 使在其内函数$f(x,y)$关于y满足利普希茨条件. 因此,根据有限覆盖定理,可以找到有限个具有这种性质的圆$C_i(i=1,2,\cdots,N)$,并且它们的全体覆盖了整个积分曲线段S. 设r_i为圆C_i的半径, L_i表$f(x,y)$于C_i内的相应的利普希茨常数. 令$\tilde{G}=\bigcup\limits_{i=1}^{N}C_i$,则有$S\subset\tilde{G}\subset G$,且$\tilde{G}$的边界与$S$的距离$\rho>0$. 对预先给定的$\varepsilon>0$,若取

$$\eta=\min(\varepsilon,\rho/2)\quad 及\quad L=\max(L_1,\cdots,L_N),$$

则以S上每一点为中心,以η为半径的圆的全体,连同它们的圆周一起构成包含S的有界闭域$D\subset G$,且$f(x,y)$在D上关于y满足利普希茨条件,利普希茨常数为L.

其次,我们断言,必存在这样的正数$\delta=\delta(\varepsilon,a,b)(\delta<\eta)$,使得只要$\bar{x}_0,\bar{y}_0$满足不等式

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2$$

则解$y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)\equiv\psi(x)$必然在区间$a\leqslant x\leqslant b$上也有定义.

事实上,由于D是一个有界闭域,且$f(x,y)$于其内关于y满足利普希茨条件,由上面延拓定理知道,解$y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$必能延拓到区域$D$的边界上. 设它在$D$的边界上的点为$(c,\psi(c))$和$(d,$

$\psi(d)), c<d$, 这时必然有 $c\leqslant a, d\geqslant b$. 因为否则设 $c>a$, $d<b$, 则由引理就有

$$|\psi(x)-\varphi(x)|\leqslant|\psi(\bar{x}_0)-\varphi(\bar{x}_0)|e^{L|x-\bar{x}_0|}, c\leqslant x\leqslant d$$

注意到 $\varphi(x)$的连续性, 对 $\delta_1=\frac{1}{2}\eta e^{-L(b-a)}$, 必有 $\delta_2>0$ 存在, 使当 $|x-x_0|\leqslant\delta_2$ 时有 $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\delta_1$. 取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, 则当 $(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2$ 时就有

$$\begin{aligned}|\psi(x)-\varphi(x)|^2&\leqslant|\psi(\bar{x}_0)-\varphi(\bar{x}_0)|^2e^{2L|x-\bar{x}_0|}\\&\leqslant(|\psi(\bar{x}_0)-\varphi(x_0)|+|\varphi(x_0)-\varphi(\bar{x}_0)|)^2e^{2L|x-\bar{x}_0|}\\&\leqslant2(|\psi(\bar{x}_0)-\varphi(x_0)|^2+|\varphi(x_0)-\varphi(\bar{x}_0)|^2)e^{2L|x-\bar{x}_0|}\\&<2(|\bar{y}_0-y_0|^2+\delta_1^2)e^{2L(b-a)}\\&\leqslant4\delta_1^2e^{2L(b-a)}=\eta^2,\ c\leqslant x\leqslant d\end{aligned}\qquad(3.21)$$

于是 $|\psi(x)-\varphi(x)|<\eta$ 对一切 $x\in[c,d]$成立, 特别地有

$$|\psi(c)-\varphi(c)|<\eta,\ |\psi(d)-\varphi(d)|<\eta,$$

即点 $(c,\psi(c))$及$(d,\psi(d))$均落在域D的内部, 而不可能位于D的边界上. 这与假设矛盾, 因此, 解 $\psi(x)$在区间$[a,b]$上有定义.

在不等式(3.21)中将区间$[c,d]$换成$[a,b]$, 可知, 当$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2$ 时就有

$$|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|<\eta\leqslant\varepsilon, a\leqslant x\leqslant b$$

这正是所要证的结论.

附注 当把解 $\varphi(x,x_0,y_0)$视为自变量 x 和初值(x_0, y_0)的三元函数时, 从上述定理可以推知它是三元连续函数. 事实上, $\varphi(x,x_0,y_0)$对 x 在闭区间$[a,b]$上连续, 因而对任给 $\varepsilon>0$ 必能找到$\delta_1>0$ 使得当 $|\bar{x}-x|<\delta_1$ 时有

$$|\varphi(\bar{x},x_0,y_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \bar{x},x\in[a,b]$$

另一方面, 由解对初值的连续依赖定理, 总存在这样的 $\delta_2>0$, 使当

$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta_2^2$ 时有

$$|\varphi(x,x_0,y_0)-\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)|<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in[a,b]$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则只要 $(\bar{x}-x)^2+(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2$，就有

$$\begin{aligned}&|\varphi(\bar{x},\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|\\&\leqslant|\varphi(\bar{x},\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(\bar{x},x_0,y_0)|+|\varphi(\bar{x},x_0,y_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

这说明 $\varphi(x,x_0,y_0)$ 在 (x,x_0,y_0) 连续.

对于任一 $(x_0,y_0)\in G$，由解的存在唯一性定理及解的延拓定理得知，存在 $\alpha(x_0,y_0)$，$\beta(x_0,y_0)$ 使得(3.1)有饱和解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 定义于 $\alpha(x_0,y_0)<x<\beta(x_0,y_0)$ 上. 令

$$V=\{(x,x_0,y_0)\,|\,\alpha(x_0,y_0)<x<\beta(x_0,y_0),\ (x_0,y_0)\in G\}$$

这时，解 $y=\varphi(x,x_0,\ y_0)$ 作为三元函数存在于 V 上，我们可以推得 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 在 V 上是连续的.

事实上，任给 $(\tilde{x},\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)\in V$，解 $y=\varphi(x,\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0)$ 作为 x 的函数，它的最大存在区间必会包含 $\tilde{x},\tilde{x}_0$. 所以存在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$，使得 $\varphi(x,\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$ 在其上有定义，其中 $a<\tilde{x},\tilde{x}_0<b$. 由附注即知 $\varphi(x,x_0,y_0)$ 在 $(\tilde{x},\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$ 连续. 再注意到 $(\tilde{x},\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)\in V$ 的任意性，我们可将解对初值的依赖关系用下面定理来表述.

解对初值的连续性定理 若函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，且关于 y 满足局部利普希茨条件，则方程(3.1)的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续的.

我们还可以讨论含有参数 λ 的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda)\qquad(3.1)_\lambda$$

用 G_λ 表示域:

$$G_\lambda: (x, y)\in G, \alpha<\lambda<\beta$$

设 $f(x, y, \lambda)$在 G_λ 内连续，且在 G_λ 内一致地关于 y 满足局部的利普希茨条件，也就是说，对 G_λ 内的每一点(x, y, λ)都存在以(x, y, λ)为中心的球 $C\subset G_\lambda$，使得对任何(x, y_1, λ)，$(x, y_2, \lambda)\in C$，成立不等式

$$|f(x, y_1, \lambda)-f(x, y_2, \lambda)|\leqslant L|y_1-y_2|$$

其中 L 是与 λ 无关的正数．由解的存在唯一性定理，对每一 $\lambda_0\in(\alpha, \beta)$，方程$(3.1)_\lambda$ 的通过点$(x_0, y_0)\in G$ 的解就唯一确定．我们把这个解记为 $y=\varphi(x, x_0, y_0, \lambda_0)$，于是就有 $y_0=\varphi(x_0, x_0, y_0, \lambda_0)$．

类似地，我们可以得到下面的结果：

解对初值和参数的连续依赖定理 设 $f(x, y, \lambda)$在 G_λ 内连续，且在 G_λ 内关于 y 一致地满足局部的利普希茨条件，$(x_0, y_0, \lambda_0)\in G_\lambda$，$y=\varphi(x, x_0, y_0, \lambda_0)$是方程$(3.1)_\lambda$ 通过点(x_0, y_0)的解，在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有定义，其中 $a\leqslant x_0\leqslant b$，那末，对任意给定的 $\varepsilon>0$，可以找到正数 $\delta=\delta(\varepsilon, a, b)$，使得当

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2+(\lambda-\lambda_0)^2\leqslant\delta^2$$

时，方程$(3.1)_\lambda$ 通过点$(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$的解 $y=\varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \lambda)$在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上也有定义，并且

$$|\varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \lambda)-\varphi(x, x_0, y_0, \lambda_0)|<\varepsilon, a\leqslant x\leqslant b$$

解对初值和参数的连续性定理 设 $f(x, y, \lambda)$在 G_λ 内连续，且在 G_λ 内关于 y 一致地满足局部的利普希茨条件，则方程$(3.1)_\lambda$ 的解 $y=\varphi(x, x_0, y_0, \lambda)$作为 x, x_0, y_0, λ 的函数在它们存在范围内是连续的．

解对初值的可微性 进一步，我们讨论解对初值的可微性，即解 $y=\varphi(x, x_0, y_0)$关于初值 x_0, y_0 的偏导数的存在性和连续性．我们有如下定理．

解对初值的可微性定理 若函数 $f(x, y)$以及$\dfrac{\partial f}{\partial y}$都在区域 G

内连续，则方程(3.1)的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续可微的.

证明 由$\frac{\partial f}{\partial y}$在区域 G 内连续，推知 $f(x,y)$ 在 G 内关于 y 满足局部利普希茨条件. 因此，在定理的条件下，解对初值的连续性定理成立，即

$$y=\varphi(x,x_0,y_0)$$

在它的存在范围内关于 x，x_0，y_0 是连续的. 下面进一步证明对于函数 $\varphi(x,x_0,y_0)$ 的存在范围内任一点偏导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$，$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$，$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$ 存在且连续.

先证$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$存在且连续.

设由初值 (x_0, y_0) 和 $(x_0+\Delta x_0, y_0)$ $(|\Delta x_0|\leqslant\alpha$，$\alpha$ 为足够小正数)①所确定的方程的解分别为

$$y=\varphi(x,x_0,y_0)\equiv\varphi \text{ 和 } y=\varphi(x,x_0+\Delta x_0,y_0)\equiv\psi$$

即

$$\varphi\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi)dx \quad\text{和}\quad \psi\equiv y_0+\int_{x_0+\Delta x_0}^{x} f(x,\psi)dx$$

于是

$$\begin{aligned}\psi-\varphi &\equiv\int_{x_0+\Delta x_0}^{x} f(x,\psi)dx-\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi)dx\\ &=-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x,\psi)dx\\ &\quad+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi-\varphi)dx\end{aligned}$$

其中 $0<\theta<1$. 注意到$\frac{\partial f}{\partial y}$及 φ,ψ 的连续性，我们有

---

① 这保证了 φ 和 ψ 同在某一区间上有定义，且当 $\Delta x_0\to 0$ 时 $\psi-\varphi\to 0$. 显然当 $\Delta x_0=0$ 时有 $\psi\equiv\varphi$.

$$\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}=\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1$$

这里 r_1 具有性质：当 $\Delta x_0\to 0$ 时 $r_1\to 0$，且当 $\Delta x_0=0$ 时 $r_1=0$. 类似地，有

$$-\frac{1}{\Delta x_0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0}f(x,\psi)dx=-f(x_0,y_0)+r_2$$

其中 r_2 与 r_1 具有相同性质，因此对 $\Delta x_0\neq 0$ 有

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}\equiv[-f(x_0,y_0)+r_2]$$
$$+\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}dx$$

即

$$z=\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$$

是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]z\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)+r_2\equiv z_0\end{cases}\tag{3.22}$$

的解，在这里 $\Delta x_0\neq 0$ 被看成参数. 显然，当 $\Delta x_0=0$ 时上述初值问题仍然有解. 根据解对初值和参数的连续性定理，知$\dfrac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$是 x, x_0, z_0, Δx_0 的连续函数. 从而存在

$$\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$$

而$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}z\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)\end{cases}$$

的解，不难求得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}dx\right)$$

显然它是 x, x_0, y_0 的连续函数.

同样可证$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$存在且连续.

事实上，设 $y=\varphi(x, x_0, y_0+\Delta y_0)\equiv\tilde{\psi}$ 为初值$(x_0, y_0+\Delta y_0)$ $(|\Delta y_0|\leqslant\alpha)$所确定的解. 类似上述的推演可证$\frac{\tilde{\psi}-\varphi}{\Delta y_0}$是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_3\right]z\\ z(x_0)=1\end{cases}$$

的解. 因而

$$\frac{\tilde{\psi}-\varphi}{\Delta y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_3\right]dx\right)$$

其中 r_3 具有性质: 当 $\Delta y_0\to0$ 时 $r_3\to0$, 且 $\Delta y_0=0$ 时 $r_3=0$.

故有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\lim_{\Delta y_0\to0}\frac{\tilde{\psi}-\varphi}{\Delta y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}dx\right)$$

它是 x, x_0, y_0 的连续函数.

至于$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$的存在及连续性, 只需注意到 $y=\varphi(x, x_0, y_0)$是方程的解, 因而

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\equiv f(x,\varphi(x,x_0,y_0))$$

由 f 及 φ 的连续性即直接推得结论.

习 题 3.3

1. 假设函数 $f(x, y)$在区域 G 内连续并满足局部利普希茨条件及 $f(x, 0)\equiv0$; 又方程(3.1)的满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=y(x, x_0, y_0)$对一切 $x\geqslant x_0$ 有定义. 试证下列说法是等价的:

(1) 任给 $\varepsilon>0$, 可以找到正数 $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)$, 使当

$$|y_0|\leqslant\delta$$

时, 对一切 $x\geqslant x_0$ 有 $|y(x, x_0, y_0)|<\varepsilon$.

(2) 任给 $\varepsilon>0$ 及 $\bar{x}_0>x_0$, 存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon, \bar{x}_0)$, 使当

$$|y(\bar{x}_0, x_0, y_0)|\leqslant\delta$$

时, 对一切 $x\geqslant\bar{x}_0$ 有 $|y(x, x_0, y_0)|<\varepsilon$.

2. 假设函数 $f(x, y)$ 及 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 都在区域 G 内连续, 又 $y=\varphi(x, x_0, y_0)$ 是方程(3.1)满足初始条件 $\varphi(x_0, x_0, y_0)=y_0$ 的解, 试证 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 存在且连续, 并写出其表达式.

3. 假设函数 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 于区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, $y=\varphi(x, x_0, y_0)$ 是方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$$

的解, $y_0=\varphi(x_0, x_0, y_0)$. 试求 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 及 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, 并从解的表达式出发, 利用对参数求导数的方法, 检验所得结果.

4. 给定方程

$$\frac{dy}{dx}=\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

试求 $\dfrac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial x_0}$, $\dfrac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial y_0}$ 当 $x_0=1, y_0=0$ 时的表达式.

§ 3.4 奇　　解

3.4.1 包络和奇解

从 § 2.4 例 2 中我们看到对某些微分方程, 存在一条特殊的积分曲线, 它并不属于这方程的积分曲线族. 但是, 在这条特殊的积分曲线上的每一点处, 都有积分曲线族中的一条曲线和它在此点相切. 在几何学上, 这条特殊的积分曲线称为上述积分曲线族的**包络**. 在微分方程里, 这条特殊的积分曲线所对应的解称为方程的**奇解**.

我们现在给出曲线族的包络的定义, 并介绍它的求法.

设给定单参数曲线族

$$\Phi(x, y, c)=0 \tag{3.23}$$

其中 c 是参数，$\Phi(x,y,c)$ 是 x,y，c 的连续可微函数. 曲线族(3.23)的包络是指这样的曲线，它本身并不包含在曲线族(3.23)中，但过这曲线的每一点，有曲线族(3.23)中的一条曲线和它在这点相切.

例如，单参数曲线族

$$(x-c)^2+y^2=R^2$$

(这里 R 是常数，c 是参数)表示圆心为 $(c,0)$ 而半径等于 R 的一族圆. 此曲线族显然有包络:

$$y=R \quad \text{和} \quad y=-R$$

(见图(3.5)).

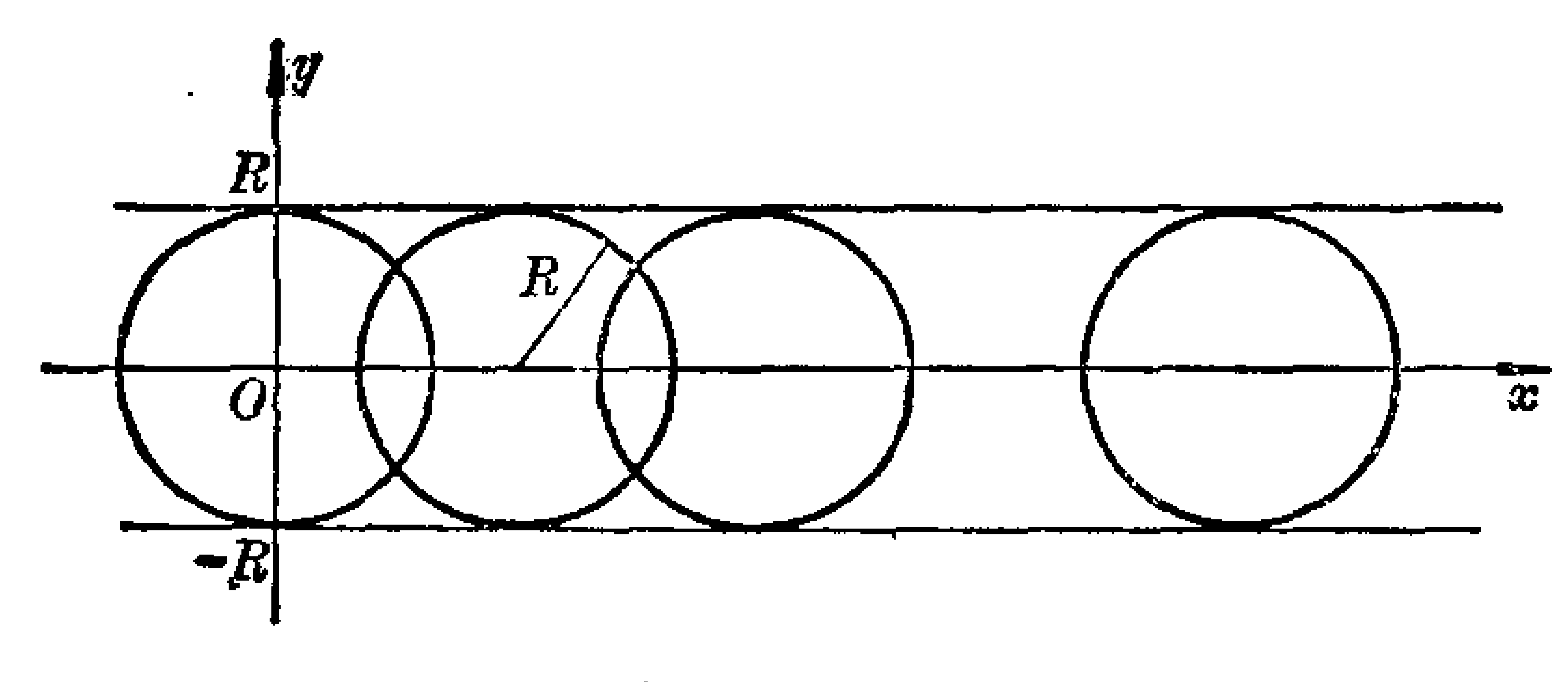


图 (3.5)

但是，一般的曲线族并不一定有包络，例如同心圆族，平行直线族都是没有包络的.

由微分几何学可知，曲线族(3.23)的包络包含在由下列二方程

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0\\ \Phi'_c(x,y,c)=0\end{cases} \tag{3.24}$$

消去 c 而得到的曲线之中. 此曲线称为(3.23)的 c-判别曲线. 必须注意，在 c-判别曲线中有时除去包络外，还有其他曲线. c-判别曲线中究竟哪一条是包络尚需实际检验.

例1 求直线族

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \tag{3.25}$$

的包络，这里 α 是参数，p 是常数.

解 将(3.25)对 α 求导数，得到

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0 \tag{3.26}$$

为了从(3.25)，(3.26)中消去 α，将(3.25)移项，然后平方，有

$$x^2\cos^2\alpha+y^2\sin^2\alpha+2xy\cos\alpha\sin\alpha=p^2 \tag{3.27}$$

将(3.26)平方，又得

$$x^2\sin^2\alpha+y^2\cos^2\alpha-2xy\cos\alpha\sin\alpha=0 \tag{3.28}$$

将(3.27)和(3.28)相加, 得到

$$x^2+y^2=p^2 \tag{3.29}$$

容易检验, (3.29)是直线族(3.25)的包络(见图(3.6)).

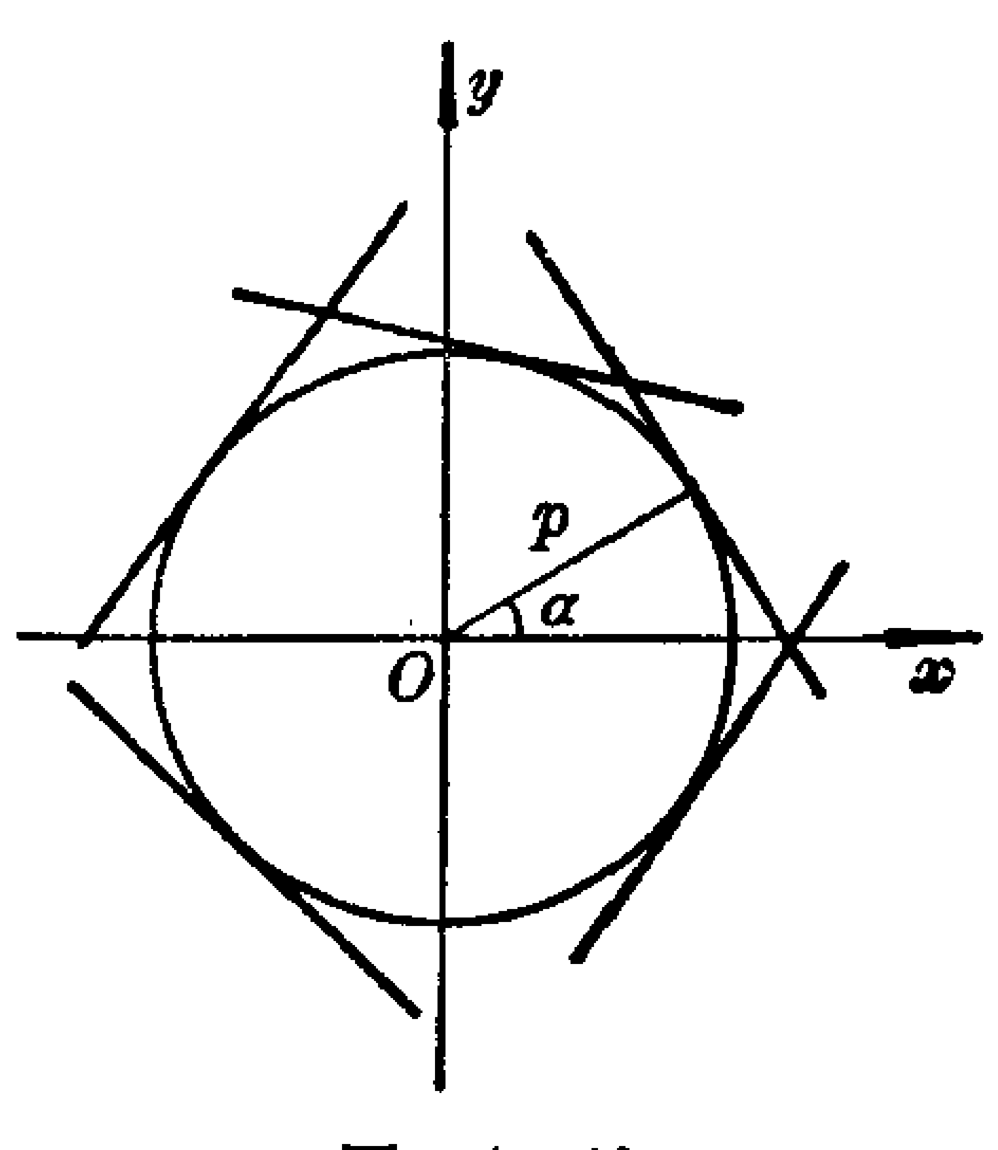


图 (3.6)

例2 求曲线族

$$(y-c)^2-\frac{2}{3}(x-c)^3=0 \tag{3.30}$$

的包络.

解 将(3.30)对 c 求导数, 得到

$$-2(y-c)+\frac{2}{3}\cdot 3(x-c)^2=0$$

即

$$y-c-(x-c)^2=0 \tag{3.31}$$

为了从(3.30)及(3.31)消去 c, 将(3.31)代入(3.30), 得

$$(x-c)^4-\frac{2}{3}(x-c)^3=0$$

即

$$(x-c)^3\left[(x-c)-\frac{2}{3}\right]=0$$

从 $x-c=0$ 得到

$$y=x \tag{3.32}$$

从 $x-c-\frac{2}{3}=0$ 得到

$$y=x-\frac{2}{9} \tag{3.33}$$

因此, c-判别曲线包括两条曲线(3.32)和(3.33), 容易检验直线 $y=x$ 不是包络, 而直线 $y=x-\frac{2}{9}$ 是包络(见图(3.7)).

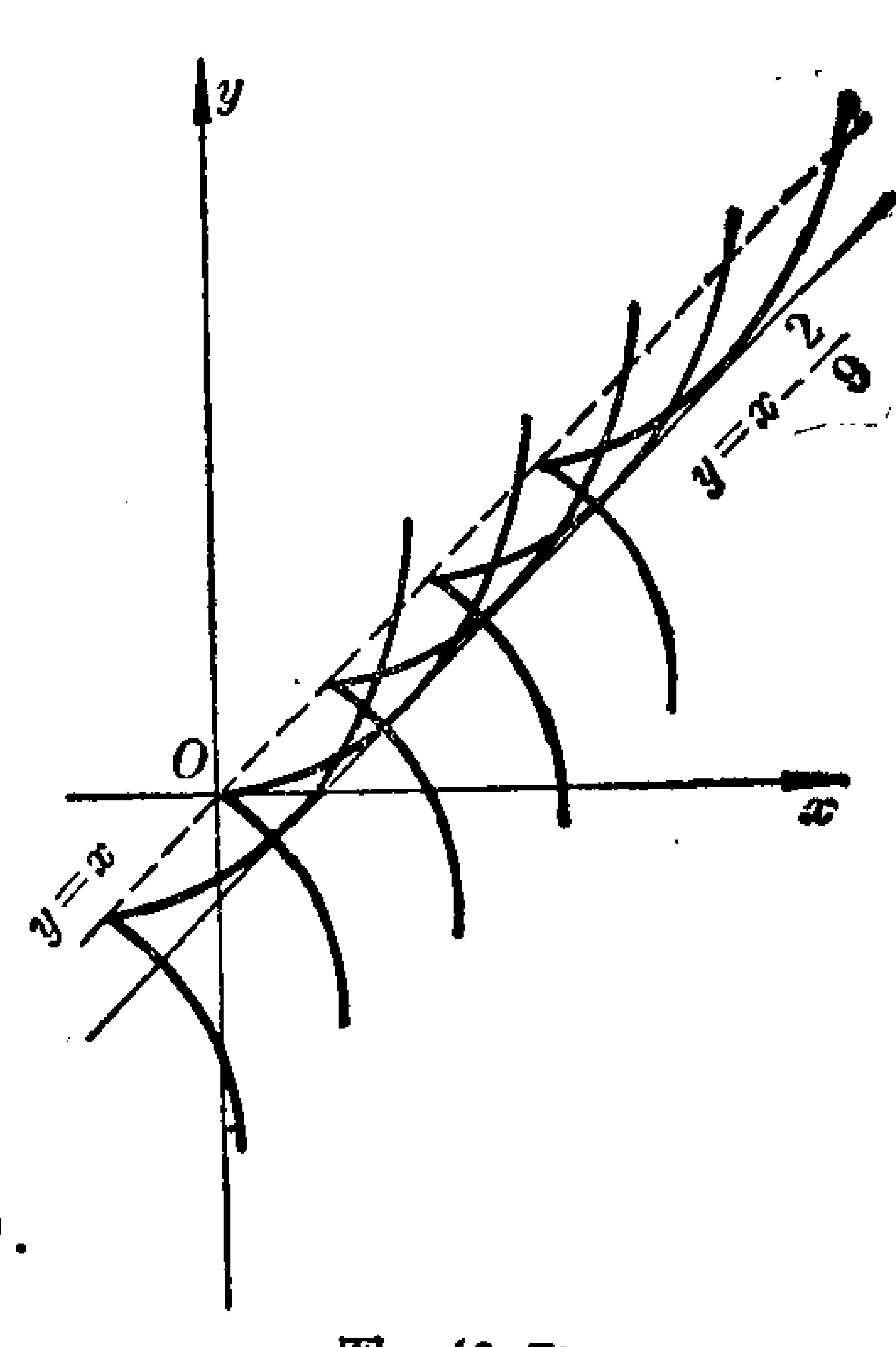


图 (3.7)

我们现在引进奇解的概念.

微分方程的某一个解称为**奇解**, 如果在这个解的每一点上至少还有方程的另外一个解存在, 也就是说奇解是这样的一个解, 在它上面的每一点唯一性都不成立. 或者说, 奇解对应的曲线上每一点至少有方程的两条积分曲线

通过.

从奇解的定义容易知道一阶微分方程的通解的包络（如果它存在的话）一定是奇解；反之，微分方程的奇解(若存在的话)也是微分方程的通解的包络. 因而，为了求微分方程的奇解，可以先求出它的通解，然后求通解的包络.

例如，我们为了求 § 2.4 例 2 的奇解，可以从通解(2.68)出发，容易求出它的包络就是 $y=x^2/4$，因而，$y=x^2/4$ 就是方程的奇解.

这里介绍另外一种求奇解的方法.

由存在唯一性定理 2 知道，如果 $F(x,y,y')$ 关于 x,y,y' 连续可微，则只要 $\frac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$ 就能保证解的唯一性，因此，奇解(存在的话)必须同时满足下列方程

$$F(x,y,y')=0,\ \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=0$$

于是我们有下面结论:

方程

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{3.34}$$

的奇解包含在由方程组①

$$\begin{cases}F(x,y,p)=0\\ F'_p(x,y,p)=0\end{cases} \tag{3.35}$$

消去 p 而得到的曲线中，这里 $F(x,y,p)$ 是 x,y,p 的连续可微函数. 此曲线称为方程(3.34)的 **p-判别曲线**. p-判别曲线是否是方程的奇解，尚需进一步验证.

例3 求方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2-1=0$ 的奇解.

解 从

$$\begin{cases}p^2+y^2-1=0\\ 2p=0\end{cases}$$

消去 p、得到 p-判别曲线

---

① 进一步可以证明，奇解必须同时适合方程 $F(x,y,p)=0$，$F'_p(x,y,p)=0$ 及 $F'_x+pF'_y=0$，并且只有当上列三个方程之一，例如后者，是其他两个方程的结果时，奇解才有可能存在. 参阅 B. B. 史捷班诺夫著，卜元震译《微分方程教程》（高等教育出版社，1956 年合订本第一版)第三章.

$$y = \pm 1$$

容易验证，此两直线都是方程的奇解．因为容易求得原方程的通解为

$$y = \sin(x + c)$$

而 $y = \pm 1$ 是微分方程的解，且正好是通解的包络．

例 4 求方程 $y = 2x\dfrac{dy}{dx} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ 的奇解．

解 从

$$\begin{cases} y = 2xp - p^2 \\ 2x - 2p = 0 \end{cases}$$

消去 p，得到 p-判别曲线

$$y = x^2$$

但 $y = x^2$ 不是方程的解，故此方程没有奇解．

应该强调指出，上面介绍的两种方法，只是提供求奇解的途径，所得 c-判别曲线或 p-判别曲线是不是奇解，必须进行检验．

3.4.2 克莱罗(Clairaut)方程

形如

$$y = xp + f(p) \tag{3.36}$$

的方程，称为**克莱罗方程**，这里 $p = \dfrac{dy}{dx}$，$f(p)$ 是 p 的连续可微函数．

这是第二章 2.4.1 已讨论过的方程类型，由于这类方程有一些特殊的性质，我们在此再作进一步地讨论．

将(3.36)两边对 x 取导数，并以 $\dfrac{dy}{dx} = p$ 代入，即得

$$p = x\frac{dp}{dx} + p + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

即

$$\frac{dp}{dx}(x + f'(p)) = 0$$

如果 $\dfrac{dp}{dx} = 0$，则得到

$$p = c$$

将它代入(3.36)，得到

$$y = cx + f(c) \tag{3.37}$$

这里 c 是任意常数，这就是(3.36)的通解.

如果 $x+f'(p)=0$，将它和(3.36)合起来

$$\begin{cases}x+f'(p)=0\\ y=xp+f(p)\end{cases} \tag{3.38}$$

消去 p 也得到方程的一个解. 注意，求得此解的过程正好与从通解(3.37)中求包络的手续一样. 可以验证，此解的确是通解的包络. 由此，我们知道，克莱罗方程的通解是一直线族(在原方程中以 c 代 p 即得)，此直线族的包络就是方程的奇解.

例 5 求解方程 $y=xp+\dfrac{1}{p}$.

解 这是克莱罗方程，因而它的通解就是

$$y=cx+\frac{1}{c}$$

从

$$\begin{cases}x-\dfrac{1}{c^2}=0\\ y=cx+\dfrac{1}{c}\end{cases}$$

中消去 c，得到奇解

$$y^2=4x$$

这方程的通解是直线族，而奇解是通解的包络(见图(3.8)).

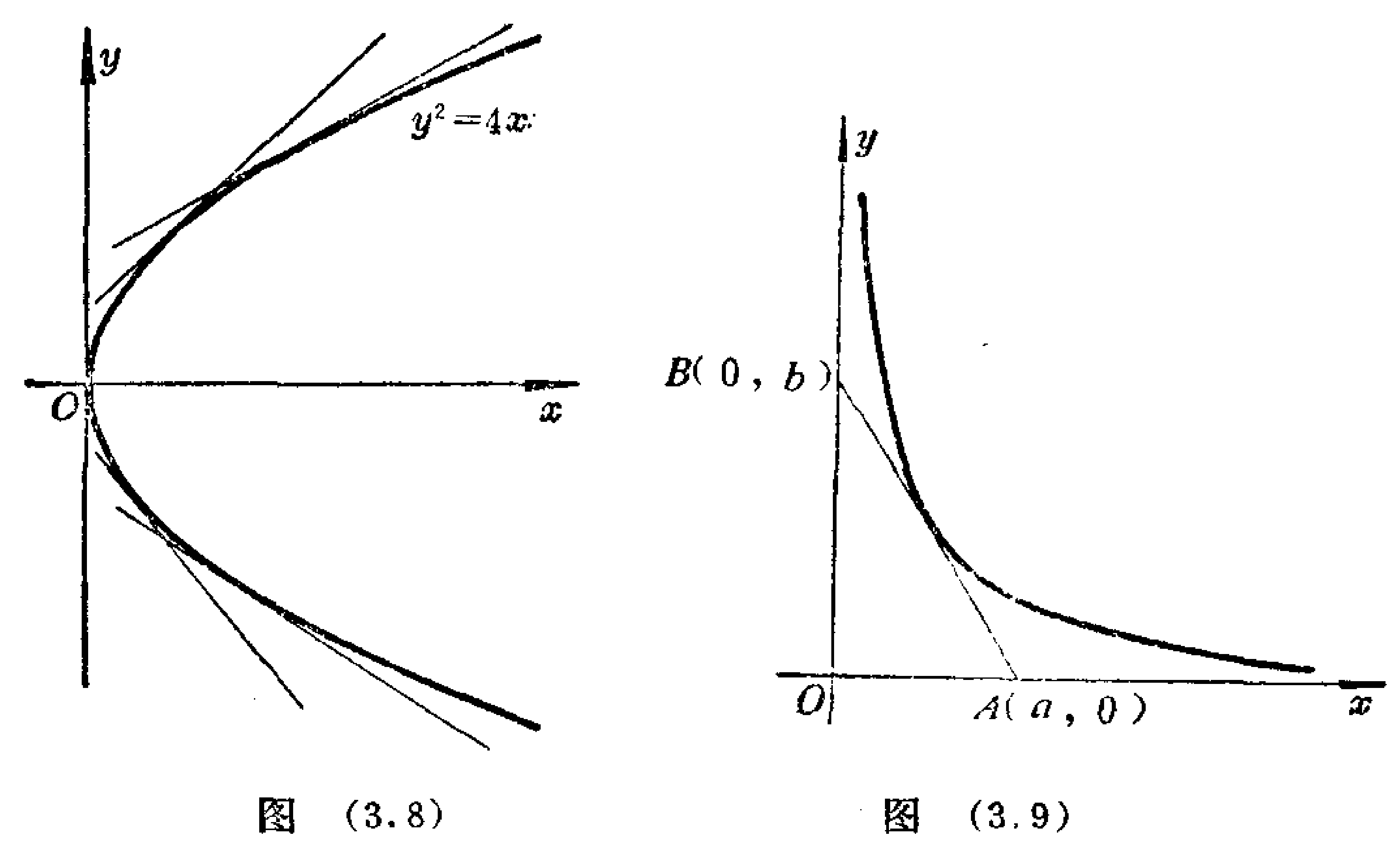


图 (3.8)　　图 (3.9)

例 6 求一曲线，使在其上每一点的切线截割坐标轴而成的直角三角形

(如图(3.9)中的三角形 OAB)的面积都等于 2。

解 设所要求的曲线的切线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

依题意有
$$ab=4$$

而
$$\frac{b}{a}=-\frac{dy}{dx}$$

由上述三式消去 a、b 得

$$\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2=-4\frac{dy}{dx}$$

或

$$y=x\frac{dy}{dx}\pm2\sqrt{-\frac{dy}{dx}}$$

这是克莱罗方程,其通解为

$$y=c_1x\pm2\sqrt{-c_1}=2c-c^2x$$

这里 $c=\pm\sqrt{-c_1}$ 为任意常数. 易见此直线族的每一条直线都是满足题意的解. 现在求曲线族的包络,亦即微分方程的奇解. 为此,从

$$\begin{cases}y=2c-c^2x\\1-cx=0\end{cases}$$

中消去 c 得微分方程的奇解 $xy=1$, 这是等腰双曲线, 显然它就是满足要求的曲线.

习 题 3.4

(一) 解下列方程,并求奇解(如果存在的话):

1. $y=2x\frac{dy}{dx}+x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$

2. $x=y-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

3. $y=x\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$,并画出积分曲线图.

4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}-y=0$,并画出积分曲线图.

5. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0$

6. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0$

7. $y=x\left(1+\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

8. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(x-a)^2=0$, a 为常数.

9. $y=2x+\frac{dy}{dx}-\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

10. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x+1)\frac{dy}{dx}-y=0$

（二）求下列曲线族的包络，并绘出图形：

1 $y=cx+c^2$

2 $c^2y+cx^2-1=0$

3 $(x-c)^2+(y-c)^2=4$

4 $(x-c)^2+y^2=4c$

（三）求一曲线，使它上面的每一点的切线截割坐标轴使两截距之和等于常数 a.

（四）试证：就克莱罗方程来说，p-判别曲线和方程通解的 c-判别曲线同样是方程通解的包络，从而为方程的奇解.

本章学习要点

本章重点在于介绍和证明解的存在唯一性定理及解的一些基本性质. 解的存在唯一性定理是微分方程理论中的基本定理，也是微分方程近似计算的前提和根据. 解的延拓定理及解对初值的连续性和可微性定理揭示了微分方程解的重要性质. 逐步逼近法是一个重要的分析方法，除本章运用它来证明存在唯一性定理外，今后还将继续应用，读者一定要熟悉和掌握这一证明方法. 因此，理解有关定理的内容，掌握逐步逼近法，这是本章的基本要求.

另外，本章还介绍了一阶微分方程奇解的概念和求奇解的两种方法. 这些内容只要求一般了解就够了.

第四章　高阶微分方程

从第一章的一些实例中我们看到，在实际问题中除了前面讨论过的一阶微分方程外，还将遇到一些其他类型的非一阶的微分方程．在这一章里我们讨论二阶及二阶以上的微分方程，即高阶微分方程．在微分方程的理论中，线性微分方程是非常值得重视的一部分内容．这不仅因为线性微分方程的一般理论已被研究得十分清楚，而且线性微分方程是研究非线性微分方程的基础，它在物理、力学和工程技术中也有着广泛的应用．本章重点讲述线性方程的基本理论和常系数方程的解法，对于高阶方程的降阶问题和二阶线性方程的幂级数解法也作简单的介绍．

§4.1　线性微分方程的一般理论

4.1.1　引言

我们讨论如下的 n 阶线性微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t) \tag{4.1}$$

其中 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 都是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数．

如果 $f(t)\equiv 0$，则方程(4.1)变为

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \tag{4.2}$$

我们称它为 n **阶齐线性微分方程**，简称**齐线性方程**，而称一般的方程(4.1)为 n **阶非齐线性微分方程**，简称**非齐线性方程**，并且通常把方程(4.2)叫做**对应于方程(4.1)的齐线性方程**．

同一阶方程一样，高阶方程也存在着是否有解和解是否唯一的问题．因此，作为讨论的基础，我们首先给出方程(4.1)的解的存在唯一性定理．

定理1 如果 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 都是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数，则对于任一 $t_0\in[a,b]$ 及任意的 $x_0,x_0^{(1)},\cdots,x_0^{(n-1)}$，方程(4.1)存在唯一解 $x=\varphi(t)$，定义于区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上，且满足初始条件：

$$\varphi(t_0)=x_0,\ \frac{d\varphi(t_0)}{dt}=x_0^{(1)},\cdots,\frac{d^{n-1}\varphi(t_0)}{dt^{n-1}}=x_0^{(n-1)} \tag{4.3}$$

我们将在下一章讲述线性方程组的有关定理时顺便给出这一定理的证明．从这个定理可以看出，初始条件唯一地确定了方程(4.1)的解，而且这个解在所有 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 连续的整个区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有定义．

4.1.2 齐线性方程的解的性质与结构

首先讨论齐线性方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \tag{4.2}$$

根据“常数可以从微分号下提出来”以及“和的导数等于导数之和”的法则，容易得到齐线性方程的解的叠加原理．

定理2（叠加原理） 如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 是方程(4.2)的 k 个解，则它们的线性组合 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)$ 也是(4.2)的解，这里 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 是任意常数．

特别地，当 $k=n$ 时，即方程(4.2)有解

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t) \tag{4.4}$$

它含有 n 个任意常数．我们要问，在什么条件下，表达式(4.4)能够成为 n 阶齐线性方程(4.2)的通解？又它将具有什么特性呢？为了讨论的需要，我们引进函数线性相关与线性无关及伏朗斯基

(Wronsky)行列式等概念.

考虑定义在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的函数 $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_k(t)$, 如果存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$, 使得恒等式

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)\equiv 0$$

对于所有 $t\in[a,b]$都成立, 我们称这些函数是**线性相关**的, 否则就称这些函数在所给区间上**线性无关**.

例如函数 $\cos t$ 和 $\sin t$ 在任何区间上都是线性无关的; 但函数 $\cos^2 t$ 和 $\sin^2 t-1$ 在任何区间上都是线性相关的.

又如函数 1, t, t^2, …, t^n 在任何区间上都是线性无关的. 因为恒等式

$$c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_nt^n\equiv 0 \tag{4.5}$$

仅当所有 $c_i=0(i=0,1,2,\cdots,n)$时才成立. 如果至少有一个 $c_i\neq 0$, 则(4.5)的左端是一个不高于 n 次的多项式, 它最多可有 n 个不同的根. 因此, 它在所考虑的区间上不能有多于 n 个零点, 更不可能恒为零了.

由定义在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的 k 个可微 $k-1$ 次的函数 $x_1(t)$, $x_2(t), \cdots, x_k(t)$所作成的行列式

$$W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)]\equiv W(t)$$
$$\equiv\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

称为这些函数的**伏朗斯基行列式**.

定理 3 若函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性相关, 则在$[a,b]$上它们的伏朗斯基行列式$W(t)\equiv 0$.

证明 由假设, 即知存在一组不全为零的常数 c_1, c_2, …, c_n, 使得

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)\equiv 0,\ a\leqslant t\leqslant b \tag{4.6}$$

依次对 t 微分此恒等式，得到

$$\begin{cases} c_1x_1'(t)+c_2x_2'(t)+\cdots+c_nx_n'(t)\equiv 0 \\ c_1x_1''(t)+c_2x_2''(t)+\cdots+c_nx_n''(t)\equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1x_1^{(n-1)}(t)+c_2x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_nx_n^{(n-1)}(t)\equiv 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

把(4.6)和(4.7)看成关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的齐次线性代数方程组，它的系数行列式就是 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]$，于是由线性代数理论知道，要此方程组存在非零解，则它的系数行列式必须为零，即 $W(t)\equiv 0(a\leqslant t\leqslant b)$. 定理证毕.

我们指出，逆定理一般不成立. 事实上，容易给出这样的函数组，由其构成的伏朗斯基行列式恒为零，然而它们却是线性无关的. 例如函数

$$x_1(t)=\begin{cases} t^2 & -1\leqslant t<0 \\ 0 & 0\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

和

$$x_2(t)=\begin{cases} 0 & -1\leqslant t<0 \\ t^2 & 0\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

在区间 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 上，显然 $W[x_1(t), x_2(t)]\equiv 0$，但它们在此区间上却是线性无关的. 因为，假设存在恒等式

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\equiv 0 \quad -1\leqslant t\leqslant 1 \tag{4.8}$$

则当 $-1\leqslant t<0$ 时，推得 $c_1=0$；而当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时又推得 $c_2=0$. 即除 $c_1=c_2=0$ 外，找不到别的常数值 c_1 和 c_2(不全为 0)使恒等式(4.8)对一切 $t\in[-1, 1]$成立，故 $x_1(t), x_2(t)$ 是线性无关的.

但是，如果 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是齐线性方程(4.2)的解，那么我们就有下面的定理.

定理 4 如果方程(4.2)的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间

$a \leqslant t \leqslant b$ 上线性无关，则 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]$ 在这个区间的任何点上都不等于零，即 $W(t) \neq 0 (a \leqslant t \leqslant b)$.

证明 采用反证法．设有某个 $t_0, a \leqslant t_0 \leqslant b$，使得 $W(t_0)=0$．考虑关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的齐次线性代数方程组

$$\begin{cases} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) + \cdots + c_n x_n(t_0) = 0 \\ c_1 x_1'(t_0) + c_2 x_2'(t_0) + \cdots + c_n x_n'(t_0) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 x_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 x_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n x_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

其系数行列式 $W(t_0)=0$，故(4.9)有非零解 $c_1, c_2, \cdots, c_n$．现以这组常数构造函数

$$x(t) \equiv c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \quad a \leqslant t \leqslant b$$

根据叠加原理，$x(t)$ 是方程(4.2)的解．注意到(4.9)，知道这个解 $x(t)$ 满足初始条件

$$x(t_0) = x'(t_0) = \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0 \tag{4.10}$$

但是 $x=0$ 显然也是方程(4.2)的满足初始条件(4.10)的解．由解的唯一性，即知 $x(t) \equiv 0 (a \leqslant t \leqslant b)$，即

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \equiv 0 \quad a \leqslant t \leqslant b$$

因为 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 不全为 0，这就与 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 线性无关的假设矛盾．定理得证．

根据定理 3 和定理 4 可以知道，由 n 阶齐线性方程(4.2)的 n 个解构成的伏朗斯基行列式，或者恒等于零，或者在方程的系数为连续的区间内处处不等于零．

根据定理 1，方程(4.2)的满足初始条件：

$$\begin{cases} x_1(t_0) = 1, x_1'(t_0) = 0, \cdots, x_1^{(n-1)}(t_0) = 0 \\ x_2(t_0) = 0, x_2'(t_0) = 1, \cdots, x_2^{(n-1)}(t_0) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n(t_0) = 0, x_n'(t_0) = 0, \cdots, x_n^{(n-1)}(t_0) = 1 \end{cases}$$

的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 一定存在，又因为

$$W[x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)] \neq 0$$

于是根据上述定理 3，这 n 个解一定是线性无关的．由此，即得下面的定理 5．

定理 5　n 阶齐线性方程(4.2)一定存在 n 个线性无关的解．

定理 6 (通解结构定理)　如果 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是方程(4.2)的 n 个线性无关的解，则方程(4.2)的通解可表为

$$x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) \tag{4.11}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是任意常数．且通解(4.11)包括了方程(4.2)的所有解．

证明　首先，由叠加原理知道(4.11)是(4.2)的解，它包含有 n 个任意常数．我们指出，这些常数是彼此独立的．事实上

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial c_1} & \dfrac{\partial x}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial x}{\partial c_n} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial c_1} & \dfrac{\partial x'}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial x'}{\partial c_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_1} & \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \equiv W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \neq 0$$

$$(a \leqslant t \leqslant b)$$

因而，(4.11)为方程(4.2)的通解；现在，我们证明它包括了方程的所有解．由定理 1 知道，方程的解唯一地决定于初始条件，因此，只需证明：任给一初始条件

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0', \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \tag{4.12}$$

能够确定 (4.11) 中的常数 c_1, c_2, $\cdots$, c_n 的值，使(4.11)满足(4.12)．

现令(4.11)满足条件(4.12)，我们得到如下关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的线性代数方程组：

$$
\begin{cases}
c_1x_1(t_0)+c_2x_2(t_0)+\cdots+c_nx_n(t_0)=x_0\\
c_1x_1'(t_0)+c_2x_2'(t_0)+\cdots+c_nx_n'(t_0)=x_0'\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_1x_1^{(n-1)}(t_0)+c_2x_2^{(n-1)}(t_0)+\cdots+c_nx_n^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)}
\end{cases}
\tag{4.13}
$$

它的系数行列式就是$W(t_0)$，由定理 4 知$W(t_0)\neq 0$. 根据线性代数方程组的理论，方程(4.13)有唯一解 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_n$. 因此，只要表达式(4.11)中常数取为 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$，则它就满足条件(4.12). 定理证完.

定理完满地回答了上面提出的问题.

推论 方程(4.2)的线性无关解的最大个数等于 n. 因此可得结论: n 阶齐线性方程的所有解构成一个 n 维线性空间.

方程(4.2)的一组 n 个线性无关解称为方程的一个**基本解组**. 显然，基本解组不是唯一的.

4.1.3 非齐线性方程与常数变易法

知道了齐线性方程通解的结构，以此为基础就不难解决非齐线性方程通解的结构问题了.

考虑 n 阶非齐线性方程

$$
\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t) \tag{4.1}
$$

易见方程(4.2)是它的特殊情形，我们指出两者之间解的性质和结构有着十分密切的联系. 首先容易直接验证如下两个简单性质:

性质 1 如果 $\bar{x}(t)$是方程(4.1)的解，而 $x(t)$是方程(4.2)的解，则 $\bar{x}(t)+x(t)$也是方程(4.1)的解.

性质 2 方程(4.1)的任意两个解之差必为方程(4.2)的解.

其次，我们有下面定理:

定理 7 设 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$为方程(4.2)的基本解组，

而 $\bar{x}(t)$ 是方程(4.1)的某一解，则方程(4.1)的通解可表为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\bar{x}(t) \tag{4.14}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为任意常数. 而且这个通解(4.14)包括了方程(4.1)的所有解.

证明 根据性质 1 易知(4.14)是方程(4.1)的解，它包含有 n 个任意常数，象定理 6 的证明过程一样，不难证明这些常数是彼此独立的，因此，它是方程(4.1)的通解. 现设 $\tilde{x}(t)$ 是方程(4.1)的任一解，则由性质 2，$\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)$ 是方程(4.2)的解，根据定理 6，必有一组确定的常数 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$，使得

$$\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)=\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t)$$

即

$$\tilde{x}(t)=\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t)+\bar{x}(t)$$

这就是说，方程(4.1)的任一解 $\tilde{x}(t)$ 可以由(4.14)表出，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为相应的确定常数. 由于 $\tilde{x}(t)$ 的任意性，这就证明了通解表达式(4.14)包括方程(4.1)的所有解. 定理证完.

定理告诉我们，要解非齐线性方程，只需知道它的一个解和对应的齐线性方程的基本解组. 我们进一步指出，只要知道对应的齐线性方程的基本解组就可以利用常数变易法求得非齐线性方程的解. 正如我们在第二章 §2.2里所做过的那样，不过这里稍为复杂一些而已.

设 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是方程(4.2)的基本解组，因而

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t) \tag{4.15}$$

为(4.2)的通解. 把其中的任意常数 c_i 看作 t 的待定函数 $c_i(t)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，这时(4.15)变为

$$x=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)+\cdots+c_n(t)x_n(t) \tag{4.16}$$

将它代入方程(4.1)，就得到 $c_1(t), c_2(t), \cdots, c_n(t)$ 必须满足的一个方程，但待定函数有 n 个，即 $c_1(t), c_2(t), \cdots, c_n(t)$，为了确定

它们，必须再找出 $n-1$ 个限制条件，在理论上，这些另加的条件可以任意给出，其法无穷，当然以运算上简便为宜，为此，我们将按下面的方法来给出这 $n-1$ 个条件.

对 t 微分等式(4.16)得

$$x'=c_1(t)x_1'(t)+c_2(t)x_2'(t)+\cdots+c_n(t)x_n'(t)$$
$$+x_1(t)c_1'(t)+x_2(t)c_2'(t)+\cdots+x_n(t)c_n'(t)$$

令

$$x_1(t)c_1'(t)+x_2(t)c_2'(t)+\cdots+x_n(t)c_n'(t)=0 \qquad (4.17)_1$$

得到

$$x'=c_1(t)x_1'(t)+c_2(t)x_2'(t)+\cdots+c_n(t)x_n'(t) \qquad (4.18)_1$$

对 t 微分$(4.18)_1$，并象上面一样做法，令含有函数 $c_i'(t)$的部分等于零，我们又得到一个条件

$$x_1'(t)c_1'(t)+x_2'(t)c_2'(t)+\cdots+x_n'(t)c_n'(t)=0 \qquad (4.17)_2$$

和表达式

$$x''=c_1(t)x_1''(t)+c_2(t)x_2''(t)+\cdots+c_n(t)x_n''(t) \qquad (4.18)_2$$

继续上面做法，在最后一次我们得到第 $n-1$ 个条件

$$x_1^{(n-2)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-2)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-2)}(t)c_n'(t)=0 \qquad (4.17)_{n-1}$$

和表达式

$$x^{(n-1)}=c_1(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n-1)}(t) \qquad (4.18)_{n-1}$$

最后，对 t 微分$(4.18)_{n-1}$ 得到

$$x^{(n)}=c_1(t)x_1^{(n)}(t)+c_2(t)x_2^{(n)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n)}(t)$$
$$+x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-1)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-1)}(t)c_n'(t) \qquad (4.18)_n$$

现将(4.16)，$(4.18)_1$，$(4.18)_2$，…，$(4.18)_n$ 代入(4.1)，并注意到 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$是(4.2)的解，得到

$$x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-1)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-1)}(t)c_n'(t)=f(t) \tag{4.17$_n$}$$

这样，我们得到了含 n 个未知函数 $c_i'(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 的 n 个方程 $(4.17)_1,(4.17)_2,\cdots,(4.17)_n$. 它们组成一个线性代数方程组，其系数行列式就是 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]$，它不等于零，因而方程组的解可唯一确定，设求得

$$c_i'(t)=\varphi_i(t) \quad i=1,2,\cdots,n$$

积分得

$$c_i(t)=\int\varphi_i(t)dt+\gamma_i \quad i=1,2,\cdots,n$$

这里 γ_i 是任意常数. 将所得 $c_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 的表达式代入 (4.16) 即得方程 (4.1) 的解①

$$x=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i(t)+\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\int\varphi_i(t)dt$$

显然，它并且是方程 (4.1) 的通解. 为了得到方程的一个解，只需给常数 $\gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 以确定的值. 例如，当取 $\gamma_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 时，即得解 $x=\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\int\varphi_i(t)dt$.

从这里可以看到，如果已知对应的齐线性方程的基本解组，那么非齐线性方程的任一解可由求积得到. 因此，对于线性方程来说，关键是求出齐线性方程的基本解组.

例 1 求方程 $x''+x=\dfrac{1}{\cos t}$ 的通解，已知它的对应齐线性方程的基本解组为 $\cos t$, $\sin t$.

解 应用常数变易法，令

$$x=c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t$$

---

① 也可把 $\varphi_i(t)$ 的表达式具体写出，而将解表为第五章 (5.30) 式的形式.

将它代入方程，则可得决定 $c_1'(t)$和 $c_2'(t)$的两个方程:

$$\cos t\, c_1'(t)+\sin t\, c_2'(t)=0$$

$$-\sin t\, c_1'(t)+\cos t\, c_2'(t)=\frac{1}{\cos t}$$

解得

$$c_1'(t)=-\frac{\sin t}{\cos t}\qquad c_2'(t)=1$$

由此

$$c_1(t)=\ln|\cos t|+\gamma_1\qquad c_2(t)=t+\gamma_2$$

于是原方程的通解为

$$x=\gamma_1\cos t+\gamma_2\sin t+\cos t\ln|\cos t|+t\sin t$$

其中 γ_1,γ_2 为任意常数.

例 2 求方程 $tx''-x'=t^2$ 于域 $t\neq 0$ 上的所有解.

解 对应的齐线性方程为

$$tx''-x'=0$$

容易直接积分求得它的基本解组. 事实上，将方程改写成

$$\frac{x''}{x'}=\frac{1}{t}$$

积分即得 $x'=At$. 所以 $x=\frac{1}{2}At^2+B$, 这里 A, B 为任意常数. 易见有基本解组 $1, t^2$. 为应用上面的结论，我们将方程改写为

$$x''-\frac{1}{t}x'=t$$

并以 $x=c_1(t)+c_2(t)t^2$ 代入，可得决定 $c_1'(t)$和 $c_2'(t)$的两个方程

$$c_1'(t)+t^2c_2'(t)=0 \text{ 及 } 2tc_2'(t)=t$$

于是

$$c_2(t)=\frac{1}{2}t+\gamma_2\qquad c_1(t)=-\frac{1}{6}t^3+\gamma_1$$

故得原方程的通解为

$$x=\gamma_1+\gamma_2 t^2+\frac{1}{3}t^3$$

这里 γ_1, γ_2 是任意常数. 根据定理7, 它包括了方程的所有解.

习 题 4.1

1. 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数, 证明: 如果在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有 $\frac{x(t)}{y(t)}\neq$ 常数或 $\frac{y(t)}{x(t)}\neq$ 常数, 则 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性无关. (提示: 用反证法.)

2. 证明非齐线性方程的叠加原理: 设 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 分别是非齐线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_1(t)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_2(t)$$

的解, 则 $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_1(t)+f_2(t)$$

的解.

3. 试验证 $\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 的基本解组为 e^t, e^{-t}, 并求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-x=\cos t$ 的通解.

4. 试验证 $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1-t}x=0$ 有基本解组 t, e^t, 并求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1-t}x=t-1$ 的通解.

5. 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+4x=t\sin 2t$ 的通解. 已知它的对应齐线性方程有基本解组 $\cos 2t, \sin 2t$.

6. 已知方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 有基本解组 e^t, e^{-t}. 试求此方程适合初始条件

$$x(0)=1\quad x'(0)=0$$

及 $$x(0)=0 \quad x'(0)=1$$
的基本解组(称为标准基本解组，即有 $W(0)=1$)，并由此求出方程的适合初始条件
$$x(0)=x_0 \quad x'(0)=x'_0$$
的解.

7. 设 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 是齐线性方程(4.2)的任意 n 个解，它们所构成的伏朗斯基行列式记为 $W(t)$. 试证明 $W(t)$ 满足一阶线性方程
$$W'+a_1(t)W=0$$
因而有
$$W(t)=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds} \quad t_0,t\in(a,b)$$

8. 假设 $x_1(t)\neq 0$ 是二阶齐线性方程
$$x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=0$$
的解，这里 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 于区间 $[a,b]$ 上连续，试证:

(1) $x_2(t)$ 为方程的解的充要条件是
$$W'[x_1,x_2]+a_1W[x_1,x_2]=0;$$

(2) 方程的通解可表为
$$x=x_1\left[c_1\int\frac{1}{x_1^2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds\right)dt+c_2\right],$$
其中 c_1,c_2 为任意常数，$t_0,t\in[a,b]$.

9. 试证 n 阶非齐线性微分方程(4.1)存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

§4.2 常系数线性方程的解法

至此，关于线性方程的通解的结构问题，从理论上说，可以认为已经解决了，但是求方程通解的方法还没有具体给出．事实上，对于一般的线性方程是没有普遍的解法的．本节介绍求解问题能够彻底解决的一类方程——常系数线性方程及可以化为这一类型的方程．我们将看到，为了求得常系数齐线性方程的通解，只须解一个代数方程而不必通过积分运算．对于某些特殊的非齐线性方程也可以通过代数运算和微分运算求得它的通解．我们一定

要记住常系数线性方程固有的这种简单特性. 这一节的内容完全可以和线性振动理论(质点振动理论, 电磁振荡理论等)结合起来学习. 在 4.2.4 中我们特别以数学摆的微小振动为例,结合讲述质点振动理论, 以便给读者一个直观的印象. 从这里我们可以清晰地看出,物理问题提供微分方程以很直观的实际背景,而微分方程为更深刻地理解物理现象提供有力的工具, 这是我们学习这一节要注意的问题.

讨论常系数线性方程的解法时, 需要涉及到实变量的复值函数及复指数函数的问题,我们在 4.2.1 中预先给以介绍.

4.2.1 复值函数与复值解

如果对于区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 中的每一实数 t, 有复数 $z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$ 与它对应,其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上定义的实函数, i 是虚数单位, 我们就说在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上给定了一个**复值函数** $z(t)$. 如果实函数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 当 t 趋于 t_0 时有极限,我们就称复值函数 $z(t)$ 当 t 趋于 t_0 时有极限,并且定义

$$\lim_{t \to t_0} z(t)=\lim_{t \to t_0} \varphi(t)+\mathrm{i} \lim_{t \to t_0} \psi(t)$$

如果 $\lim\limits_{t \to t_0} z(t)=z(t_0)$, 我们就称 **$z(t)$ 在 t_0 连续**. 显然, $z(t)$ 在 t_0 连续相当于 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 在 t_0 连续. 当 $z(t)$ 在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上每点都连续时, 就称 **$z(t)$ 在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上连续**. 如果极限 $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}$ 存在,就称 **$z(t)$ 在 t_0 有导数(可微)**. 且记此极限为 $\dfrac{dz(t_0)}{dt}$ 或者 $z'(t_0)$. 显然 $z(t)$ 在 t_0 处有导数相当于 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 在 t_0 处有导数,且

$$\frac{dz(t_0)}{dt}=\frac{d\varphi(t_0)}{dt}+\mathrm{i}\frac{d\psi(t_0)}{dt}$$

如果 $z(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上每点都有导数，就称 $z(t)$ **在区间** $a\leqslant t\leqslant b$ **上有导数**. 对于高阶导数可以类似地定义.

设 $z_1(t)$、$z_2(t)$ 是定义在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的可微函数，c 是复值常数，容易验证下列等式成立：

$$\frac{d}{dt}[z_1(t)+z_2(t)]=\frac{dz_1(t)}{dt}+\frac{dz_2(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[cz_1(t)]=c\frac{dz_1(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[z_1(t)\cdot z_2(t)]=\frac{dz_1(t)}{dt}\cdot z_2(t)+z_1(t)\cdot\frac{dz_2(t)}{dt}$$

在讨论常系数线性方程时，函数 e^{Kt} 将起着重要的作用，这里 K 是复值常数. 我们现在给出它的定义，并且讨论它的简单性质.

设 $K=\alpha+i\beta$ 是任一复数，这里 α、β 是实数，而 t 为实变量我们定义

$$e^{Kt}=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$$

由上述定义立即推得

$$\cos\beta t=\frac{1}{2}(e^{i\beta t}+e^{-i\beta t})$$

$$\sin\beta t=\frac{1}{2i}(e^{i\beta t}-e^{-i\beta t})$$

如果以 $\bar{K}=\alpha-i\beta$ 表示复数 $K=\alpha+i\beta$ 的共轭复数. 那末容易证明

$$e^{\overline{Kt}}=\overline{e^{Kt}}$$

此外，函数 e^{Kt} 还有下面重要性质：

(1) $e^{(K_1+K_2)t}=e^{K_1t}\cdot e^{K_2t}$

事实上，记 $K_1=\alpha_1+i\beta_1$，$K_2=\alpha_2+i\beta_2$，那末由定义得到

$$\begin{aligned}e^{(K_1+K_2)t}&=e^{(\alpha_1+\alpha_2)t+i(\beta_1+\beta_2)t}\\&=e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}[\cos(\beta_1+\beta_2)t+i\sin(\beta_1+\beta_2)t]\\&=e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}[\cos\beta_1t\cdot\cos\beta_2t-\sin\beta_1t\cdot\sin\beta_2t\end{aligned}$$

$$+\mathrm{i}(\sin\beta_1 t\cdot\cos\beta_2 t+\cos\beta_1 t\cdot\sin\beta_2 t)]$$
$$=\mathrm{e}^{\alpha_1 t}(\cos\beta_1 t+\mathrm{i}\sin\beta_1 t)\cdot\mathrm{e}^{\alpha_2 t}(\cos\beta_2 t+\mathrm{i}\sin\beta_2 t)$$
$$=\mathrm{e}^{K_1 t}\cdot\mathrm{e}^{K_2 t}$$

(2) $\dfrac{d\mathrm{e}^{Kt}}{dt}=K\mathrm{e}^{Kt}$，其中 t 为实变量.

事实上，设 $K=\alpha+\mathrm{i}\beta$，则

$$\frac{d\mathrm{e}^{Kt}}{dt}=\frac{d}{dt}[\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}]=\frac{d}{dt}(\mathrm{e}^{\alpha t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t})$$
$$=\frac{d\mathrm{e}^{\alpha t}}{dt}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}+\mathrm{e}^{\alpha t}\cdot\frac{d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}}{dt}$$
$$=\alpha\mathrm{e}^{\alpha t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}+\mathrm{e}^{\alpha t}\frac{d}{dt}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)$$
$$=\alpha\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}+\mathrm{e}^{\alpha t}(-\beta\sin\beta t+\mathrm{i}\beta\cos\beta t)$$
$$=\alpha\mathrm{e}^{Kt}+\mathrm{i}\beta\mathrm{e}^{\alpha t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}=(\alpha+\mathrm{i}\beta)\mathrm{e}^{Kt}=K\mathrm{e}^{Kt}$$

注意到 $\dfrac{d}{dt}[K\mathrm{e}^{Kt}]=K\dfrac{d\mathrm{e}^{Kt}}{dt}$，由(2)容易推得

(3) $\dfrac{d^n}{dt^n}(\mathrm{e}^{Kt})=K^n\mathrm{e}^{Kt}$

综上所述，可以得出一个简单的结论，就是实变量的复值函数的求导公式与实变量的实值函数的求导公式完全类似，而复指数函数具有与实指数函数完全类似的性质．这可以帮助我们记忆上面的结果.

现在我们引进线性方程的复值解的定义．定义于区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的实变量复值函数 $x=z(t)$ 称为方程(4.1)的**复值解**，如果

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dz(t)}{dt}+a_n(t)z(t)\equiv f(t)$$

对于 $a\leqslant t\leqslant b$ 恒成立.

最后，我们给出在今后讨论中要用到的两个简单结论.

定理 8 如果方程(4.2)中所有系数 $a_i(t)(i=1, 2, \cdots, n)$都是实值函数，而 $x=z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$ 是方程的复值解，则 $z(t)$ 的实部 $\varphi(t)$、虚部 $\psi(t)$和共轭复值函数 $\bar{z}(t)$也都是方程(4.2)的解.

定理 9 若方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)+\mathrm{i}v(t)$$

有复值解 $x=U(t)+\mathrm{i}V(t)$，这里 $a_i(t)(i=1,2, \cdots, n)$及 $u(t)$，$v(t)$都是实函数，那么这个解的实部 $U(t)$和虚部 $V(t)$分别是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)$$

和

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=v(t)$$

的解.

定理 8 和定理 9 的证明留给读者作为练习.

4.2.2 常系数齐线性方程和欧拉方程

设齐线性方程中所有系数都是常数，即方程有如下形状

$$L[x]\equiv\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=0 \qquad (4.19)$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数. 我们称(4.19)为 n 阶常系数齐线性方程. 正如前面所指出的，它的求解问题可以归结为代数方程求根问题，现在就来具体讨论方程(4.19)的解法. 按照§4.1 的一般理论，为了求方程(4.19)的通解，只需求出它的基本解组. 下面介绍求(4.19)的基本解组的**欧拉(Euler)待定指数函数法**.

回顾一阶常系数齐线性方程

$$\frac{dx}{dt}+ax=0$$

我们知道它有形如 $x=e^{-at}$ 的解，且它的通解就是 $x=ce^{-at}$. 这启示我们对于方程(4.19)也去试求指数函数形式的解

$$x=e^{\lambda t} \tag{4.20}$$

其中 λ 是待定常数，可以是实的，也可以是复的.

注意到

$$L[e^{\lambda t}]\equiv\frac{d^ne^{\lambda t}}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}e^{\lambda t}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{de^{\lambda t}}{dt}+a_ne^{\lambda t}$$
$$=(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n)e^{\lambda t}\equiv F(\lambda)e^{\lambda t}$$

其中 $F(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ 是 λ 的 n 次多项式. 易知，(4.20)为方程(4.19)的解的充要条件是：λ 是代数方程

$$F(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{4.21}$$

的根. 因此，方程(4.21)将起着预示方程(4.19)的解的特性的作用，我们称它为方程(4.19)的**特征方程**，它的根就称为**特征根**. 下面根据特征根的不同情况分别进行讨论.

1) 特征根是单根的情形

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是特征方程(4.21)的 n 个彼此不相等的根，则相应地方程(4.19)有如下 n 个解：

$$e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ \cdots,\ e^{\lambda_n t} \tag{4.22}$$

我们指出这 n 个解在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性无关，从而组成方程的基本解组. 事实上，这时

$$W(t)\equiv\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_n t}\\ \lambda_1e^{\lambda_1 t} & \lambda_2e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_ne^{\lambda_n t}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n t}\end{vmatrix}$$

$$
= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}
$$

而最后一个行列式是著名的范德蒙（Vandermonde）行列式，它等于 $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)$. 由于假设 $\lambda_i\neq\lambda_j$(当 $i\neq j$). 故此行列式不等于零，从而 $W(t)\neq 0$，于是解组(4.22)线性无关，这就是所要证明的.

如果 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为实数，则(4.22)是方程(4.19)的 n 个线性无关的实值解，而方程(4.19)的通解可表示为

$$
x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}
$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为任意常数.

如果特征方程有复根，则因方程的系数是实常数，复根将成对共轭地出现. 设 $\lambda_1=\alpha+i\beta$ 是一特征根，则 $\lambda_2=\alpha-i\beta$ 也是特征根，因而与这对共轭复根对应的，方程(4.19)有两个复值解

$$
e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)
$$

$$
e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)
$$

根据定理 8，它们的实部和虚部也是方程的解. 这样一来，对应于特征方程的一对共轭复根 $\lambda=\alpha\pm i\beta$，我们可求得方程(4.19)的两个实值解:

$$
e^{\alpha t}\cos\beta t, \qquad e^{\alpha t}\sin\beta t
$$

2）特征根有重根的情形

设特征方程有 k 重根 $\lambda=\lambda_1$，则如所周知

$$
F(\lambda_1)=F'(\lambda_1)=\cdots=F^{(k-1)}(\lambda_1)=0 \quad F^{(k)}(\lambda_1)\neq 0
$$

先设 $\lambda_1=0$，即特征方程有因子 λ^k，于是

$$
a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{n-k+1}=0
$$

也就是特征方程的形状为

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-k}\lambda^k=0$$

而对应的方程(4.19)变为

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}\frac{d^k x}{dt^k}=0$$

易见它有 k 个解 $1, t, t^2, \cdots, t^{k-1}$，而且它们是线性无关的（见4.1.2）。这样一来，特征方程的 k 重零根就对应于方程(4.19)的 k 个线性无关解 $1, t, t^2, \cdots, t^{k-1}$.

如果这个 k 重根 $\lambda\neq 0$，我们作变量变换 $x=ye^{\lambda_1 t}$，注意到

$$\begin{aligned}x^{(m)}&=(ye^{\lambda_1 t})^{(m)}\\&=e^{\lambda_1 t}\left[y^{(m)}+m\lambda_1 y^{(m-1)}+\frac{m(m-1)}{2!}\lambda_1^2 y^{(m-2)}+\right.\\&\qquad\left.\cdots+\lambda_1^m y\right]\end{aligned}$$

可得

$$L[ye^{\lambda_1 t}]=\left(\frac{d^n y}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_n y\right)e^{\lambda_1 t}\equiv L_1[y]e^{\lambda_1 t}$$

于是方程(4.19)化为

$$L_1[y]\equiv\frac{d^n y}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_n y=0 \qquad (4.23)$$

其中 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 仍为常数，而相应的特征方程为

$$G(\mu)\equiv\mu^n+b_1\mu^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\mu+b_n=0 \qquad (4.24)$$

直接计算易得

$$\begin{aligned}F(\mu+\lambda_1)e^{(\mu+\lambda_1)t}&=L[e^{(\mu+\lambda_1)t}]=L_1[e^{\mu t}]e^{\lambda_1 t}\\&=G(\mu)e^{(\mu+\lambda_1)t}\end{aligned}$$

因此

$$F(\mu+\lambda_1)=G(\mu)$$

从而

$$F^{(j)}(\mu+\lambda_1)=G^{(j)}(\mu),\ j=1,2,\cdots,k$$

可见(4.21)的根 $\lambda=\lambda_1$ 对应于(4.24)的根 $\mu=\mu_1=0$，而且重数相同. 这样，问题就化为前面已经讨论过的情形了.

我们知道，方程(4.24)的 k_1 重根 $\mu_1=0$ 对应于方程(4.23)的 k_1 个解 $y=1,t,t^2,\cdots,\ t^{k_1-1}$，因而对应于特征方程(4.21)的 k_1 重根 λ_1，方程(4.19)有 k_1 个解：

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ t^2e^{\lambda_1 t},\ \cdots,\ t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t} \tag{4.25}$$

同样，假设特征方程(4.21)的其他根 $\lambda_2,\ \lambda_3,\cdots,\ \lambda_m$ 的重数依次为 $k_2,k_3,\cdots,k_m;k_i\geqslant 1$(单根 λ_j 相当于 $k_j=1$)，而且 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n,\lambda_j\neq\lambda_i$(当 $i\neq j$)，则方程(4.19)对应地有解：

$$\begin{cases}e^{\lambda_2 t},\ te^{\lambda_2 t},\ t^2e^{\lambda_2 t},\ \cdots,\ t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t}\\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\ e^{\lambda_m t},\ te^{\lambda_m t},\ t^2e^{\lambda_m t},\ \cdots,\ t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}\end{cases} \tag{4.26}$$

下面我们证明(4.25)和(4.26)全体 n 个解构成方程(4.19)的基本解组.

假若这些函数线性相关，则有

$$\sum_{r=1}^{m}(A_0^{(r)}+A_1^{(r)}t+\cdots+A_{k_r-1}^{(r)}t^{k_r-1})e^{\lambda_r t}$$
$$\equiv\sum_{r=1}^{m}P_r(t)e^{\lambda_r t}\equiv 0 \tag{4.27}$$

其中 $A_j^{(r)}$ 是常数，不全为零. 不失一般性，假定多项式 $P_m(t)$ 至少有一个系数不等于零，即 $P_m(t)\not\equiv 0$. 将恒等式(4.27)除以 $e^{\lambda_1 t}$，然后对 t 微分 k_1 次，我们得到

$$\sum_{r=2}^{m}Q_r(t)e^{(\lambda_r-\lambda_1)t}\equiv 0 \tag{4.28}$$

其中 $Q_r(t)\equiv(\lambda_r-\lambda_1)^{k_1}P_r(t)+S_r(t)$，$S_r(t)$ 为次数低于 $P_r(t)$ 的次数的多项式. 因此，$Q_r(t)$ 与 $P_r(t)$ 次数相同，且 $Q_m(t)\not\equiv 0$. 恒

等式(4.28)与(4.27)类似，但项数减少了．如果对(4.28)施行同上的手续(这时是除以 $e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$ 而微分 k_2 次)，我们将得到项数更少的类似于(4.27)的恒等式，如此继续下去，经过 $m-1$ 次后，我们就将得到恒等式

$$R_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})t}\equiv 0$$

这是不可能的，因为 $R_m(t)$ 与 $P_m(t)$ 有相同的次数，且 $R_m(t)\not\equiv 0$．事实上，不难直接算得

$$R_m(t)\equiv(\lambda_m-\lambda_1)^{k_1}(\lambda_m-\lambda_2)^{k_2}\cdots$$
$$(\lambda_m-\lambda_{m-1})^{k_{m-1}}P_m(t)+W_m(t)$$

其中 $W_m(t)$ 是次数低于 $P_m(t)$ 的次数的多项式．

这就证明了(4.25)和(4.26)全部 n 个解线性无关，从而构成方程(4.19)的基本解组．

对于特征方程有复重根的情况，譬如假设 $\lambda=\alpha+i\beta$ 是 k 重特征根，则 $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ 也是 k 重特征根，仿 1)一样处理，我们将得到方程(4.19)的 $2k$ 个实值解：

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t,\ t^2e^{\alpha t}\cos\beta t,\ \cdots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t,\ t^2e^{\alpha t}\sin\beta t,\ \cdots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

例 1　求方程 $\frac{d^4x}{dt^4}-x=0$ 的通解．

解　特征方程 $\lambda^4-1=0$ 的根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=i$，$\lambda_4=-i$．有两个实根和两个复根，均是单根，故方程的通解为

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t$$

这里 c_1, c_2, c_3, c_4 是任意常数．

例 2　求解方程 $\frac{d^3x}{dt^3}+x=0$．

解　特征方程 $\lambda^3+1=0$ 有根 $\lambda_1=-1$，$\lambda_{2,3}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$，因此，通解为

$$x=c_1e^{-t}+e^{\frac{1}{2}t}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

例 3 求方程$\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}-x=0$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$, 或$(\lambda-1)^3=0$, 即 $\lambda=1$ 是三重根, 因此方程的通解具有形状

$$x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^t$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

例 4 求解方程$\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$.

解 特征方程为 $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$, 或$(\lambda^2+1)^2=0$, 即特征根 $\lambda=\pm i$ 是重根. 因此, 方程有四个实值解

$$\cos t,\ t\cos t,\ \sin t,\ t\sin t$$

故通解为

$$x=(c_1+c_2t)\cos t+(c_3+c_4t)\sin t$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数.

形状为

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \tag{4.29}$$

的方程称为**欧拉方程**, 这里 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数. 此方程可以通过变量变换化为常系数齐线性方程, 因而求解问题也就可以解决.

事实上, 引进自变量的变换①

$$x=e^t,\ t=\ln x$$

直接计算得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

① 如果 $x<0$, 则用 $x=-e^t$ 所得结果一样, 今后为确定起见, 认定 $x>0$, 但最后结果应以 $t=\ln|x|$ 代回.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

用数学归纳法不难证明：对一切自然数 k 均有关系式

$$\frac{d^ky}{dx^k}=e^{-kt}\left(\frac{d^ky}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt}\right)$$

其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k-1}$ 都是常数. 于是

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k}=\frac{d^ky}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt}$$

将上述关系式代入方程(4.29)，就得到常系数齐线性方程

$$\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0 \tag{4.30}$$

其中 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是常数，因而可用上述讨论的方法求出(4.30)的通解，再代回原来的变量(注意：$t=\ln|x|$)就可求得方程(4.29)的通解.

由上述推演过程，我们知道方程(4.30)有形如 $y=e^{\lambda t}$ 的解，从而方程 (4.29)有形如 $y=x^\lambda$ 的解，因此可以直接求欧拉方程的形如 $y=x^K$的 解. 以 $y=x^K$代入(4.29)并约去因子 x^K，就得到确定 K的代数方程

$$K(K-1)\cdots(K-n+1)+a_1K(K-1)\cdots(K-n+2)$$
$$+\cdots+a_n=0 \tag{4.31}$$

可以证明这正是(4.30)的特征方程. 因此，方程(4.31)的m重实根 $K=K_0$, 对应于方程(4.29)的m个解

$$x^{K_0},\ x^{K_0}\ln|x|,\ x^{K_0}\ln^2|x|,\ \cdots,\ x^{K_0}\ln^{m-1}|x|$$

而方程(4.31)的m重复根 $K=\alpha+i\beta$, 对应于方程(4.29)的 $2m$ 个实值解

$$x^\alpha\cos(\beta\ln|x|),\ x^\alpha\ln|x|\cos(\beta\ln|x|),\cdots,x^\alpha\ln^{m-1}|x|\cos(\beta\ln|x|)$$
$$x^\alpha\sin(\beta\ln|x|),\ x^\alpha\ln|x|\sin(\beta\ln|x|),\cdots,x^\alpha\ln^{m-1}|x|\sin(\beta\ln|x|)$$

例 5 求解方程$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0$.

解 寻找方程的形式解 $y=x^K$，得到确定K的方程 $K(K-1)-K+1=0$，或$(K-1)^2=0$，$K_1=K_2=1$. 因此，方程的通解为

$$y=(c_1+c_2\ln|x|)x$$

其中 c_1，c_2 是任意常数.

例 6 求解方程$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+5y=0$.

解 设 $y=x^K$，得到K应满足的方程

$$K(K-1)+3K+5=0 \quad 或 \quad K^2+2K+5=0$$

因此，$K_{1,2}=-1\pm 2i$，而方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}[c_1\cos(2\ln|x|)+c_2\sin(2\ln|x|)]$$

其中 c_1，c_2 是任意常数.

4.2.3 非齐线性方程·比较系数法与拉普拉斯变换法

现在讨论常系数非齐线性方程

$$L[x]\equiv\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t) \qquad (4.32)$$

的求解问题，这里 $a_1, a_2, \cdots, a_n$是常数，而$f(t)$为连续函数.

本来，有了前面讨论的结果，这一问题已经可以解决了，因为可以按照 4.2.2 的方法求出对应齐线性方程(4.19) 的基本解组，再应用 § 4.1 所述的常数变易法，求得方程(4.32)的一个特解. 这样，根据定理 7 即可写出方程(4.32)的通解表达式，再利用初始条件确定通解中的任意常数，就可得到方程的满足初始条件的解. 但是，正如大家所看到的，通过上述步骤求解往往是比较繁琐的，而且必须经过积分运算. 下面介绍当$f(t)$具有某些特殊形状时所

适用的一些方法——**比较系数法**和**拉普拉斯变换法**. 它们的特点是不需通过积分而用代数方法即可求得非齐线性方程的特解. 即将求解微分方程的问题转化为某一个代数问题来处理. 因而比较简便.

(一) 比较系数法

类型 I

设 $f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)e^{\lambda t}$, 其中 λ 及 $b_i(i=0,1,\cdots,m)$ 为实常数, 那么方程(4.32)有形如

$$\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)e^{\lambda t} \qquad (4.33)$$

的特解, 其中 k 为特征方程 $F(\lambda)=0$ 的根 λ 的重数 (单根相当于 $k=1$; 当 λ 不是特征根时, 取 $k=0$), 而 $B_0, B_1, \cdots, B_m$ 是待定常数, 可以通过比较系数来确定.

1) 如果 $\lambda=0$, 则此时

$$f(t)=b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_m$$

现在再分两种情形讨论.

(1) 在 $\lambda=0$ 不是特征根的情形, 即 $F(0)\neq0$, 因而 $a_n\neq0$, 这时, 取 $k=0$, 以 $\tilde{x}=B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_m$ 代入方程(4.32), 并比较 t 的同次幂的系数, 得到常数 $B_0, B_1, \cdots, B_m$ 必须满足的方程:

$$\begin{cases} B_0a_n=b_0 \\ B_1a_n+mB_0a_{n-1}=b_1 \\ B_2a_n+(m-1)B_1a_{n-1}+m(m-1)B_0a_{n-2}=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_ma_n+\cdots=b_m \end{cases} \qquad (4.34)$$

注意到 $a_n\neq0$, 这些待定常数 $B_0, B_1, \cdots, B_m$ 可以从方程组(4.34)唯一地逐个确定出来.

(2) 在 $\lambda=0$ 是 k 重特征根的情形, 即 $F(0)=F'(0)=\cdots=$

$F^{(k-1)}(0)=0$, 而 $F^{(k)}(0)\neq 0$, 也就是 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{n-k+1}=0$, $a_{n-k}\neq 0$. 这时相应地, 方程(4.32)将为

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}\frac{d^k x}{dt^k}=f(t) \tag{4.35}$$

令 $\frac{d^k x}{dt^k}=z$, 则方程(4.35)化为

$$\frac{d^{n-k} z}{dt^{n-k}}+a_1\frac{d^{n-k-1}z}{dt^{n-k-1}}+\cdots+a_{n-k}z=f(t) \tag{4.36}$$

对方程(4.36)来说, 由于 $a_{n-k}\neq 0$, $\lambda=0$ 已不是它的特征根. 因此, 由(1) 知它有形如 $\tilde{z}=\tilde{B}_0t^m+\tilde{B}_1t^{m-1}+\cdots+\tilde{B}_m$ 的特解, 因而方程(4.35)有特解 $\tilde{x}$ 满足:

$$\frac{d^k \tilde{x}}{dt^k}=\tilde{z}=\tilde{B}_0t^m+\tilde{B}_1t^{m-1}+\cdots+\tilde{B}_m$$

这表明 $\tilde{x}$ 是 t 的 $m+k$ 次多项式, 其中 t 的幂次 $\leqslant k-1$ 的项带有任意常数. 但因我们只需要知道一个特解就够了. 我们特别地取这些任意常数均为零, 于是我们得到方程(4.35)(或方程(4.32))的一个特解

$$\tilde{x}=t^k(\gamma_0t^m+\gamma_1t^{m-1}+\cdots+\gamma_m)$$

这里 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_m$ 是已确定了的常数.

2) 如果 $\lambda\neq 0$, 则此时可象 4.2.2 做法一样, 作变量变换 $x=ye^{\lambda t}$, 将方程(4.32)化为

$$\frac{d^n y}{dt^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+A_{n-1}\frac{dy}{dt}+A_ny=b_0t^m+\cdots+b_m \tag{4.37}$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是常数. 而且特征方程(4.21)的根 λ 对应于方程(4.37)的特征方程的零根, 并且重数也相同. 因此, 利用上面的结果就有如下结论:

在 λ 不是特征方程(4.21) 的根的情形, 方程(4.37) 有特解 $\tilde{y}=B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_m$, 从而方程(4.32)有特解 $\tilde{x}=(B_0t^m+$

$B_1t^{m-1}+\cdots+B_m)e^{\lambda t}$;

在 λ 是特征方程(4.21)的 k 重根的情形，方程(4.37)有特解 $\tilde{y}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_m)$，从而方程(4.32)有特解

$$\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_m)e^{\lambda t}.$$

例 7 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=3t+1$ 的通解．

解 先求对应的齐线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=0$$

的通解．这里特征方程 $\lambda^2-2\lambda-3=0$ 有两个根 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-1$．因此，通解为 $x=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}$，其中 c_1，c_2 为任意常数．再求非齐线性方程的一个特解．这里 $f(t)=3t+1$．$\lambda=0$．又因为 $\lambda=0$ 不是特征根，故可取特解形如 $\tilde{x}=A+Bt$、其中 A, B 为待定常数．为了确定 A, B，将 $\tilde{x}=A+Bt$ 代入原方程，得到

$$-2B-3A-3Bt=3t+1$$

比较系数得

$$\begin{cases}-3B=3\\-2B-3A=1\end{cases}$$

由此得 $B=-1$，$A=\frac{1}{3}$，从而 $\tilde{x}=\frac{1}{3}-t$，因此，原方程的通解为

$$x=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}-t+\frac{1}{3}$$

例 8 求方程$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=e^{-t}$ 的通解．

解 从上例知道对应的齐线性方程的通解为

$$x=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数．现求原方程的一个特解．这里 $f(t)=e^{-t}$，因为 $\lambda=-1$ 刚好是特征方程的单根，故有特解形如 $\tilde{x}=Ate^{-t}$，将

它代入原方程得到$-4Ae^{-t}=e^{-t}$，从而$A=-\frac{1}{4}$，于是

$\tilde{x}=-\frac{1}{4}te^{-t}$，而原方程的通解为

$$x=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}-\frac{1}{4}te^{-t}$$

例 9 求$\frac{d^3x}{dt^3}+3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+x=e^{-t}(t-5)$的通解.

解 特征方程$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=(\lambda+1)^3=0$有三重根$\lambda_{1,2,3}=-1$，故有形状为$\tilde{x}=t^3(A+Bt)e^{-t}$的特解，将它代入方程得

$$(6A+24Bt)e^{-t}=e^{-t}(t-5)$$

比较系数求得$A=-\frac{5}{6}$，$B=\frac{1}{24}$. 从而$\tilde{x}=\frac{1}{24}t^3(t-20)e^{-t}$. 故方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-t}+\frac{1}{24}t^3(t-20)e^{-t}$$

其中c_1, c_2, c_3为任意常数.

类型 II

设$f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$，其中$\alpha, \beta$为常数，而$A(t)$，$B(t)$是带实系数的$t$的多项式，其中一个的次数为$m$，而另一个的次数不超过$m$，那么我们有如下结论：方程(4.32)有形如

$$\tilde{x}=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t} \tag{4.38}$$

的特解，这里k为特征方程$F(\lambda)=0$的根$\alpha+i\beta$的重数，而$P(t)$，$Q(t)$均为待定的带实系数的次数不高于m的t的多项式，可以通过比较系数的方法来确定.

事实上，回顾一下类型 I 的讨论过程，易见当λ不是实数，而是复数时，有关结论仍然正确. 现将$f(t)$表为指数形式

$$f(t)=\frac{A(t)-\mathrm{i}B(t)}{2}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}+\frac{A(t)+\mathrm{i}B(t)}{2}\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t}$$

根据非齐线性方程的叠加原理(见习题 4.1)方程

$$L[x]=f_1(t)\equiv\frac{A(t)+\mathrm{i}B(t)}{2}\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t}$$

与

$$L[x]=f_2(t)\equiv\frac{A(t)-\mathrm{i}B(t)}{2}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}$$

的解之和必为方程(4.32)的解.

注意到 $\overline{f_1(t)}=f_2(t)$, 易知, 若 x_1 为 $L[x]=f_1(t)$的解, 则 $\overline{x}$ 必为 $L[x]=f_2(t)$的解. 因此, 直接利用类型 I 的结果, 可知方程(4.32)有解形如

$$\begin{aligned}\tilde{x}&=t^kD(t)\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t}+t^k\overline{D(t)}\,\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}\\&=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]\mathrm{e}^{\alpha t}\end{aligned}$$

其中 $D(t)$ 为 t 的 m 次多项式, 而 $P(t)=2\mathrm{Re}\{D(t)\}$, $Q(t)=2\mathrm{Im}\{D(t)\}$.

显然, $P(t)$, $Q(t)$为带实系数的 t 的多项式, 其次数不高于 m_1. 可见上述结论成立.

例 10 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=\cos 2t$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=0$ 有重根 $\lambda_1=\lambda_2=-2$, 因此, 对应齐线性方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)\mathrm{e}^{-2t}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 现求非齐线性方程的一个特解. 因为 $\pm 2\mathrm{i}$ 不是特征根, 我们求形如 $\tilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$ 的特解, 将它代入原方程并化简得到

$$8B\cos 2t-8A\sin 2t=\cos 2t$$

比较同类项系数得 $A=0$, $B=\frac{1}{8}$, 从而 $\tilde{x}=\frac{1}{8}\sin 2t$, 因此原方程

的通解为

$$x=(c_1+c_2t)e^{-2t}+\frac{1}{8}\sin 2t$$

附注 类型 II 的特殊情形

$$f(t)=A(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \text{ 或 } f(t)=B(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$$

可用另一更简便的方法——所谓**复数法**求解. 下面用例子具体说明解题过程.

例 11 用复数法解例 10.

解 由例 10 已知对应齐线性方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)e^{-2t}$$

为求非齐线性方程的一个特解, 我们先求方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=e^{2it}$$

的特解. 这属于类型 I, 而 2i 不是特征根, 故可设特解为

$$\tilde{x}=Ae^{2it}$$

将它代入方程并消去因子 e^{2it} 得 $8iA=1$, 因而 $A=-\frac{i}{8}$, $\tilde{x}=-\frac{i}{8}e^{2it}=-\frac{i}{8}\cos 2t+\frac{1}{8}\sin 2t$, 分出它的实部 $\mathrm{Re}\{\tilde{x}\}=\frac{1}{8}\sin 2t$. 根据定理 9 这就是原方程的特解, 于是原方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)e^{-2t}+\frac{1}{8}\sin 2t$$

与例 10 所得结果相同.

(二) 拉普拉斯变换法

常系数线性微分方程(组)还可以应用拉普拉斯变换法进行求解, 这往往比较简便.

由积分

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt$$

所定义的确定于复平面($\mathrm{Re}s>\sigma$)上的复变数 s 的函数 $F(s)$，称为函数 $f(t)$的**拉普拉斯变换**，其中 $f(t)$于 $t\geqslant 0$ 有定义，且满足不等式

$$|f(t)|<Me^{\sigma t}\text{①}$$

这里 M,σ 为某两个正常数. 我们将称 $f(t)$为**原函数**，而 $F(s)$称为**象函数**.

拉普拉斯变换法主要是借助于拉普拉斯变换把常系数线性微分方程(组)转换成复变数 s 的代数方程(组). 通过一些代数运算，一般地再利用拉普拉斯变换表，即可求出微分方程(组)的解. 方法十分简单方便，为工程技术工作者所普遍采用. 当然，方法本身也有一定的局限性，它要求所考察的微分方程的右端函数必须是原函数，否则方法就不适用了.

关于拉普拉斯变换的一般概念及基本性质，请参阅书末的附录I，那里并附有拉普拉斯变换表. 这里我们简单地介绍拉普拉斯变换在解常系数线性微分方程中的应用，关于在微分方程组方面的应用，留待下一章有关部分再介绍.

设给定微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n x=f(t) \tag{4.32}$$

及初始条件

$$x(0)=x_0,\ x'(0)=x_0',\ \cdots,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是常数，而 $f(t)$连续且满足原函数的条件.

可以证明②，如果 $x(t)$是方程(4.32)的任意解，则 $x(t)$及其各阶导数 $x^{(k)}(t)(k=1,2,\cdots,n)$均是原函数. 记

① 对于复值的 $f(t)$，$|f(t)|$表其模.

② 见第五章定理 12 的推论.

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]\equiv\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)dt$$

$$X(s)=\mathscr{L}[x(t)]\equiv\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}x(t)dt$$

那么，按原函数微分性质有

$$\mathscr{L}[x'(t)]=sX(s)-x_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathscr{L}[x^{(n)}(t)]=s^nX(s)-s^{n-1}x_0-s^{n-2}x_0'-\cdots-x_0^{(n-1)}$$

于是，对方程(4.32)两端施行拉普拉斯变换，并利用线性性质就得到

$$\begin{aligned}&s^nX(s)-s^{n-1}x_0-s^{n-2}x_0'-\cdots-sx_0^{(n-2)}-x_0^{(n-1)}\\&+a_1[s^{n-1}X(s)-s^{n-2}x_0-s^{n-3}x_0'-\cdots-x_0^{(n-2)}]\\&+\cdots\cdots\cdots\\&+a_{n-1}[sX(s)-x_0]\\&+a_nX(s)=F(s)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&(s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n)X(s)\\&=F(s)+(s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\cdots+a_{n-1})x_0\\&+(s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\cdots+a_{n-2})x_0'+\cdots+x_0^{(n-1)}\end{aligned}$$

或

$$A(s)X(s)=F(s)+B(s)$$

其中 $A(s)$、$B(s)$和 $F(s)$都是已知多项式，由此

$$X(s)=\frac{F(s)+B(s)}{A(s)}$$

这就是方程(4.32)的满足所给初始条件的解 $x(t)$ 的象函数．而 $x(t)$可直接查拉普拉斯变换表或由反变换公式计算求得．下面举几个用这种方法解方程的例子．

例 12 求方程 $\frac{dx}{dt}-x=e^{2t}$ 满足初始条件 $x(0)=0$ 的解.

解 对方程两端实行拉普拉斯变换，得到方程的解的象函数所应满足的方程:

$$sX(s)-x(0)-X(s)=\frac{1}{s-2}$$

由此,并注意到 $x(0)=0$, 得

$$X(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}$$

直接查拉普拉斯变换表，可得 $\frac{1}{s-2}$ 和 $\frac{1}{s-1}$ 的原函数分别为 e^{2t} 和 e^{t}. 因此,利用线性性质①,就求得 $X(s)$ 的原函数为

$$x(t)=e^{2t}-e^{t}$$

这就是所要求的解.

例13 求解方程 $x''+2x'+x=e^{-t}$, $x(1)=x'(1)=0$.

解 先令 $\tau=t-1$, 将问题化为

$$x''+2x'+x=e^{-(\tau+1)},\ x(0)=x'(0)=0$$

再对新方程两边作拉普拉斯变换,得到

$$s^2X(s)+2sX(s)+X(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{e}$$

因此

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)^3}\cdot\frac{1}{e}$$

查拉普拉斯变换表可得

$$x(\tau)=\frac{1}{2}\tau^2e^{-\tau-1}$$

从而

---

① 见附录 I § 2.

$$x(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2e^{-t}$$

这就是所要求的解.

例14 求方程 $x'''+3x''+3x'+x=1$ 的满足初始条件 $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ 的解.

解 对方程两边施行拉普拉斯变换得

$$(s^3+3s^2+3s+1)X(s)=\frac{1}{s}$$

由此得

$$X(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}$$

把上式右端分解成部分分式

$$\frac{1}{s(s+1)^3}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^3}$$

对上式右端各项分别求出(查表)其原函数,则它们的和就是 $X(s)$ 的原函数

$$x(t)=1-e^{-t}-te^{-t}-\frac{1}{2}t^2e^{-t}=1-\frac{1}{2}(t^2+2t+2)e^{-t}$$

这就是所要求的解.

例 15 求解方程 $x''+a^2x=b\sin at$; $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_0'$, 其中 a,b 为非零常数.

解 对方程实行拉普拉斯变换,得到

$$s^2X(s)-x_0s-x_0'+a^2X(s)=\frac{ab}{s^2+a^2}$$

即

$$X(s)=\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}+x_0\frac{s}{s^2+a^2}+x_0'\frac{1}{s^2+a^2}$$

把上式右端第一项分解为部分分式:

$$\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}=\frac{b}{2a}\left[\frac{1}{s^2+a^2}-\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]$$

于是

$$X(s)=\frac{b}{2a}\left[\frac{1}{s^2+a^2}-\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]+x_0\frac{s}{s^2+a^2}+x_0'\frac{1}{s^2+a^2}$$

$$=\frac{b}{2a^2}\left[\frac{a}{s^2+a^2}-a\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]+x_0\frac{s}{s^2+a^2}+\frac{x_0'}{a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}$$

由拉普拉斯变换表可求得

$$x(t)=\frac{b}{2a^2}(\sin at-at\cos at)+x_0\cos at+\frac{x_0'}{a}\sin at$$

$$=\frac{1}{2a^2}[(b+2ax_0')\sin at+a(2ax_0-bt)\cos at]$$

此即为所要求的解.

4.2.4 质点振动

振动是日常生活和工程技术中常见的一种运动形式. 例如钟摆的往复摆动,弹簧的振动,乐器中弦线的振动,机床主轴的振动,电路中的电磁振荡等等. 振动问题的研究,在一定条件下,可以归结为二阶常系数线性微分方程的问题来讨论. 下面我们以第一章里所举的力学典型例子数学摆作为具体的物理模型,利用常系数线性方程的理论,讨论有关自由振动和强迫振动的问题,并阐明有关的一些物理现象. 至于 *R-L-C* 电路中的电磁振荡完全可以同样地加以讨论.

(1) 无阻尼自由振动

考察数学摆的无阻尼微小自由振动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.18}$$

记$\frac{g}{l}=\omega^2$,这里 $\omega>0$ 是常数,(1.18)变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=0 \tag{4.39}$$

这是二阶常系数齐线性方程，它的特征方程为

$$\lambda^2+\omega^2=0$$

特征根为共轭复根

$$\lambda_{1,2}=\pm\omega i$$

因此，方程(4.39)的通解为

$$\varphi=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t \tag{4.40}$$

其中 c_1, c_2 为常数. 为了获得明显的物理意义，令

$$\sin\theta=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},\quad \cos\theta=\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$$

因此，若取

$$A=\sqrt{c_1^2+c_2^2},\qquad \theta=\operatorname{arctg}\frac{c_1}{c_2}.$$

则(4.40)可以写成

$$\begin{aligned}\varphi&=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\omega t+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\omega t\right)\\&=A(\sin\theta\cos\omega t+\cos\theta\sin\omega t)\end{aligned}$$

即

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta) \tag{4.41}$$

这里 A, θ 代替了 c_1, c_2 作为通解中所含的两个任意常数.

从通解(4.41)可以看出，不论反映摆的初始状态的 A 与 θ 为何值，摆的运动总是一个正弦函数，它是 t 的周期函数（参看图

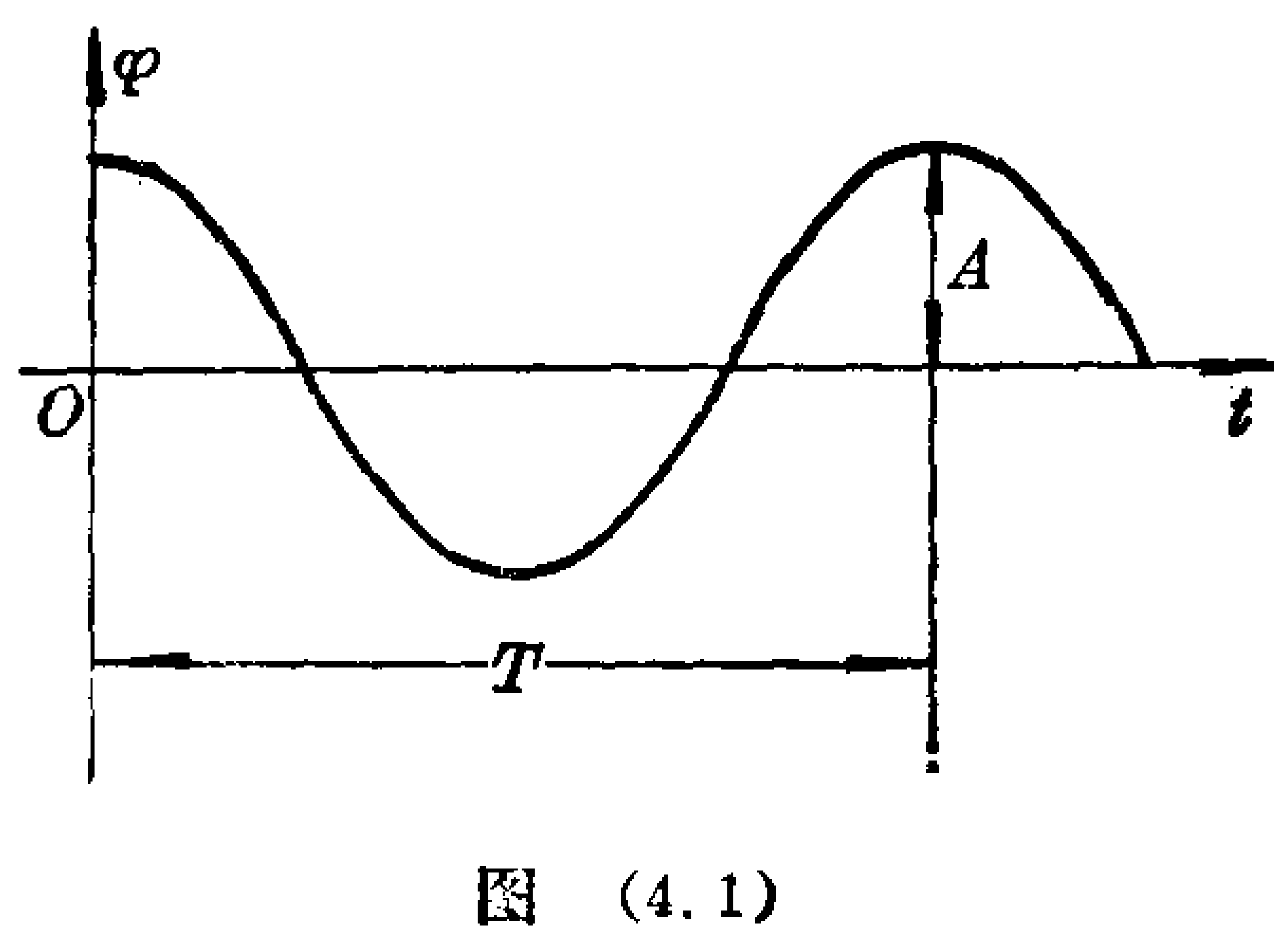


图 (4.1)

(4.1)). 这种运动称为**简谐振动**. 振动往返一次所需的时间称为**周期**, 记为 T, 这里 $T=\frac{2\pi}{\omega}$; 单位时间内振动的次数称为**频率**, 记作 ν, 这里 $\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$; 而 $\omega=2\pi\nu$ 称为**圆频率**. 从而得出结论: 数学摆的周期只依赖于摆长 l, 而与初值无关.

此外, 摆离开平衡位置的最大偏离称为**振幅**. 数学摆的振幅为 A, 而 θ 称为**初位相**. 这里, 振幅和初位相都依赖于初始条件.

如果把数学摆移至位置 $\varphi=\varphi_0$ 处, 然后突然松开, 使其自由摆动, 这就相当于给定如下的初始条件:

$$t=0\text{ 时}, \varphi=\varphi_0, \frac{d\varphi}{dt}=0 \tag{4.42}$$

把(4.42)代入通解(4.41), 得到

$$\varphi|_{t=0}=A\sin\theta=\varphi_0$$

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0}=A\omega\cos\theta=0$$

于是得初位相 $\theta=\frac{\pi}{2}$, 振幅 $A=\varphi_0$. 因此, 所求的特解为

$$\varphi=\varphi_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=\varphi_0\cos\omega t$$

(2) 有阻尼自由振动

从通解(4.41)可以看到, 无阻尼的自由振动是按正弦规律作周期运动, 摆动似乎可以无限期的进行下去. 但是, 实际情况并不是如此, 摆总是经过一段时间的摆动后就会停下来, 这说明我们所得的方程并没有完全反映物体运动的规律. 因为空气阻力在实际上总是难免的, 因此必须把运动阻力这一因素考虑进去, 从而得到第一章已推导过的摆的有阻尼的自由振动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.19}$$

记$\frac{\mu}{m}=2n$, $\frac{g}{l}=\omega^2$，这里n,ω是正常数，(1.19)可以写成

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=0 \tag{4.43}$$

它的特征方程为

$$\lambda^2+2n\lambda+\omega^2=0 \tag{4.44}$$

特征根为

$$\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-\omega^2}$$

对于不同的阻尼值n，微分方程有不同形式的解，它表示不同的运动形式，现分下面三种情况进行讨论：

(i) 小阻尼的情形：即$n<\omega$的情形，这时λ_1,λ_2为一对共轭复根，记$\omega_1=\sqrt{\omega^2-n^2}$，则

$$\lambda_{1,2}=-n\pm\omega_1\mathrm{i}$$

而方程(4.43)的通解为

$$\varphi=\mathrm{e}^{-nt}(c_1\cos\omega_1 t+c_2\sin\omega_1 t)$$

和前面无阻尼的情形一样，可以把上述通解改写成如下形式：

$$\varphi=A\mathrm{e}^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta) \tag{4.45}$$

这里A,θ为任意常数.

从(4.45)可见，摆的运动已不是周期的，振动的最大偏离随着时间增加而不断减小，而摆从一个最大偏离到达同侧下一个最大偏离所需的时间为$T=\frac{2\pi}{\omega_1}$. 图(4.2)表示函数(4.45)的图形，图上虚线是$\varphi=A\mathrm{e}^{-nt}$的图形. 而实线表示摆运动的偏离随时间变化的规律，它夹在两条虚线中间振动. 因为阻尼的存在，摆的最大偏离随时间增大而不断减小，最后摆趋于平衡位置$\varphi=0$.

(ii) 大阻尼的情形：即$n>\omega$的情形，这时$\lambda_2<\lambda_1<0$，特征方程(4.44)有两个不同的负实根. 方程(4.43)的通解为

$$\varphi=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \tag{4.46}$$

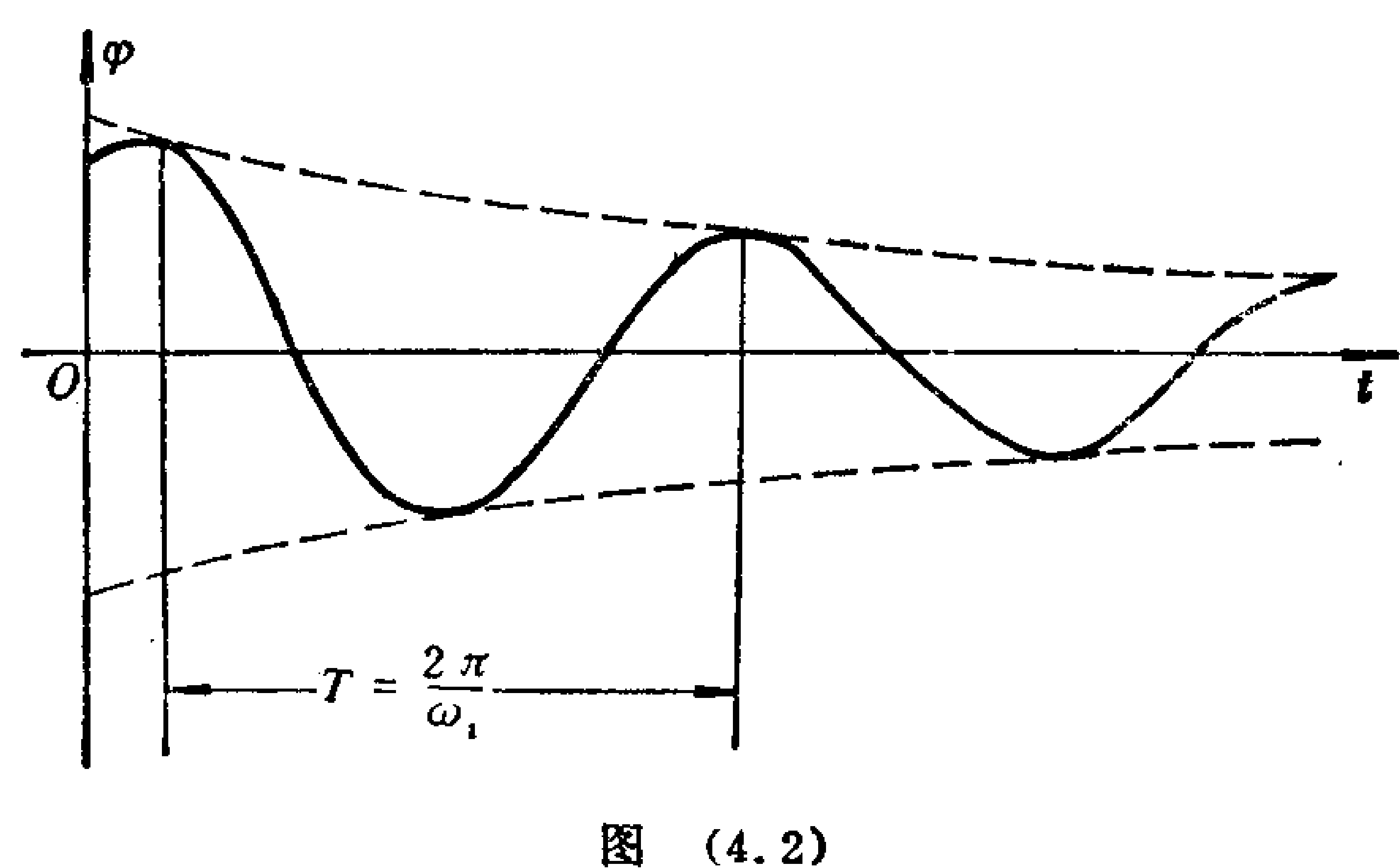


图 (4.2)

这里 c_1, c_2 是任意常数.

从(4.46)可以看出,摆的运动也不是周期的,因为方程

$$0=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$$

对于 t 最多只有一个解, 因此, 摆最多只通过平衡位置一次, 又因为

$$\frac{d\varphi}{dt}=c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t}+c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}$$

故从

$$\frac{d\varphi}{dt}=e^{\lambda_1 t}[c_1\lambda_1+c_2\lambda_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}]$$

得知,当 t 足够大时,$\frac{d\varphi}{dt}$的符号与 c_1 的符号相反. 因此, 经过一段时间后,摆就单调地趋于平衡位置, 因而在大阻尼的情形,运动不是周期的, 且不再具有振动的性质. 摆的运动规律(4.46)的图形如图(4.3)所示.

(iii) 临界阻尼的情形: 即 $n=\omega$ 的情形, 这时特征方程(4.44)有重根 $\lambda_1=\lambda_2=-n$. 方程(4.43)的通解为

$$\varphi=e^{-nt}(c_1+c_2t) \tag{4.47}$$

这里 c_1, c_2 是任意常数.

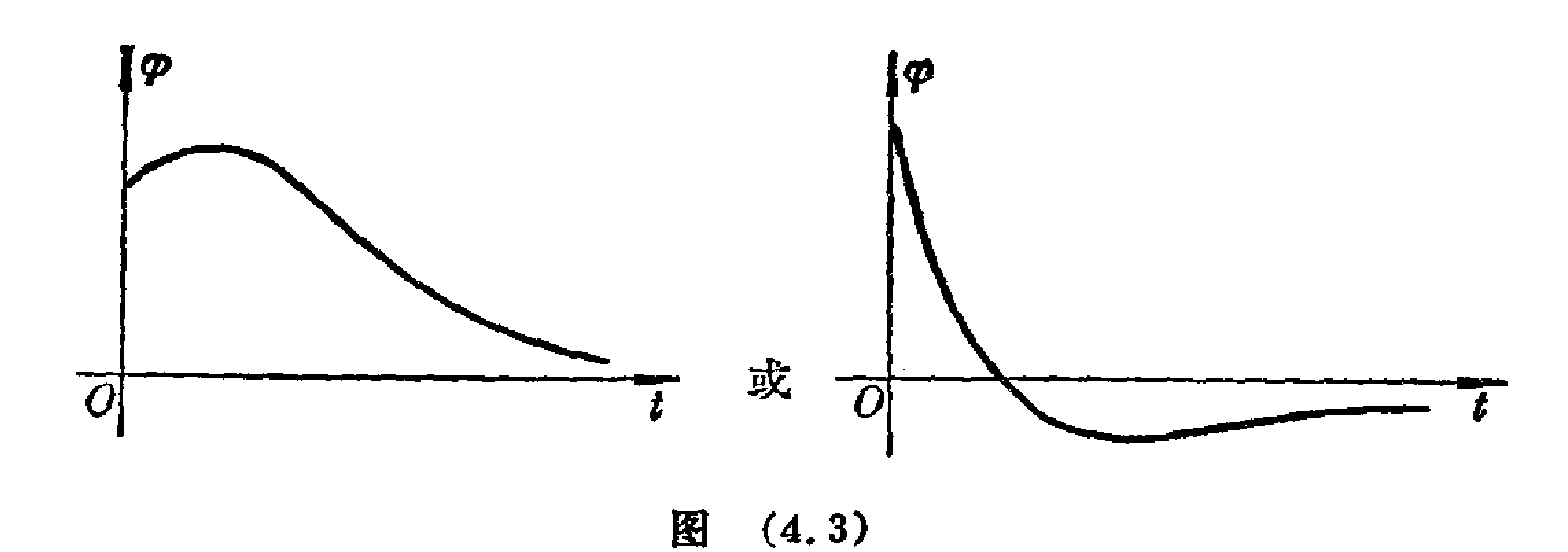


图 (4.3)

从(4.47)可以看出，摆的运动也不是周期的，它的运动规律(4.47)的图形和图(4.3)相类似．摆也不具有振动的性质．数值 $n=\omega$ 称为**阻尼的临界值**，这一数值正好足够抑制振动．这里临界值的意思是指：摆处于振动状态或不振动状态的阻尼分界值，即当 $n\geqslant\omega$ 时，摆不具有振动性质，运动规律如图(4.3)所示．而当 $n<\omega$ 时，摆具有振动性质，运动规律如图(4.2)所示．

以上谈到的无阻尼自由振动和有阻尼自由振动都属于自由振动，它对应于一个二阶常系数齐线性方程．当一个振动系统还经常受到一个外力作用时，这种振动称为强迫振动．最常见的外力往往是按周期变化的．这里考察周期外力特别是按正弦变化的外力作用下的强迫振动．我们仍以数学摆为例．

(3) 无阻尼强迫振动

数学摆的微小强迫振动方程可写为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t) \tag{1.20}$$

考察无阻尼强迫振动，即 $\mu=0$ 的情形．令 $\frac{g}{l}=\omega^2$，设 $\frac{F(t)}{ml}=H\sin pt$，H 为已知常数，p 为外力圆频率．这时(1.20)变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=H\sin pt \tag{4.48}$$

方程(4.48)的对应齐线性方程的通解为

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta) \tag{4.41}$$

这里 A、θ 是任意常数．现求(4.48)的一个特解．如果 $\omega\neq p$，则(4.48)有形如

$$\tilde{\varphi}=M\cos pt+N\sin pt \tag{4.49}$$

的解，这里 M, N 是待定常数．将(4.49)代入(4.48)，比较同类项系数，得到

$$M=0, \quad N=\frac{H}{\omega^2-p^2}$$

因此，方程(4.48)的通解为

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta)+\frac{H}{\omega^2-p^2}\sin pt \tag{4.50}$$

这个通解(4.50)由两部分组成，第一部分是无阻尼自由振动的解 $A\sin(\omega t+\theta)$，它代表固有振动，第二部分是振动频率与外力频率相同，而振幅不同的项 $\frac{H}{\omega^2-p^2}\sin pt$，它代表由外力引起的强迫振动．从(4.50)还可以看出，如果外力的圆频率 p 愈接近固有圆频率 ω，则强迫振动项的振幅就愈大．

如果 $p=\omega$，则(4.48)有形如

$$\tilde{\varphi}=t(M\cos\omega t+N\sin\omega t)$$

的解，将它代入(4.48)，比较同类项系数得到

$$M=-\frac{H}{2\omega}, \quad N=0$$

因而，方程(4.48)的通解为

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta)-\frac{H}{2\omega}t\cos\omega t \tag{4.51}$$

(4.51)表示随着时间的增大，摆的偏离将无限增加，这种现象称为**共振现象**．但是，实际上，随着摆的偏离的增加，到了一定程度，方程(4.48)就不能描述摆的运动状态了．

(4) 有阻尼强迫振动

这时摆的运动方程为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=H\sin pt \tag{4.52}$$

根据实际的需要，我们只讨论小阻尼的情形，即$n<\omega$的情形．这时(4.52)的对应齐线性方程的通解为

$$\varphi=Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta) \tag{4.45}$$

这里A、θ是任意常数，$\omega_1=\sqrt{\omega^2-n^2}$(见(2)有阻尼自由振动中的情形(i))．

现求(4.52)的一个特解，这时可以寻求形如

$$\tilde{\varphi}=M\cos pt+N\sin pt \tag{4.53}$$

的特解，这里M、N是待定常数．将(4.53)代进(4.52)，比较同类项系数，得到

$$M=\frac{-2npH}{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}\qquad N=\frac{(\omega^2-p^2)H}{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}$$

为了获得更明显的物理意义，令

$$M=H^*\sin\theta^*,\quad N=H^*\cos\theta^*$$

即令

$$H^*=\sqrt{M^2+N^2}=\frac{H}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}} \tag{4.54}$$

及

$$\operatorname{tg}\theta^*=\frac{-2np}{\omega^2-p^2}$$

这时(4.53)可以写成

$$\tilde{\varphi}=H^*\sin\theta^*\cos pt+H^*\cos\theta^*\sin pt=H^*\sin(pt+\theta^*)$$

因此，(4.52)的通解为

$$\varphi=Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta)+\frac{H}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\sin(pt+\theta^*) \tag{4.55}$$

从(4.55)可以看到，摆的运动由两部分叠加而成，第一部分是有阻尼的自由振动，它是系统本身的固有振动，它随时间的增长而衰减，第二部分是由外力而引起的强迫振动项，它的振幅不随时间的增长而衰减. 因此，考虑强迫振动时主要就考虑后一项

$\frac{H}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\sin(pt+\theta^*)$，它与外力的频率一样，但相位和振幅都不同了.

我们现在来研究外力的圆频率 p 取什么值时所引起的强迫振动项的振幅 H^* 达到最大值

从(4.54)看出，只需讨论当 p 取何值时 $(\omega^2-p)^2+4n^2p^2$ 达到最小值即可. 为此，记 $\Phi(p)=(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2$，将它对 p 求导数，并令导数等于零，得到

$$\Phi'(p)=-4p(\omega^2-p^2)+8n^2p=0$$

因此，只要 $2n^2<\omega^2$，即只要阻尼很小时，就解得

$$p=\sqrt{\omega^2-2n^2} \tag{4.56}$$

而当 p 取此值时，我们有 $\Phi''(p)=8p^2>0$，因而 $\Phi(p)$ 在

$$p=\sqrt{\omega^2-2n^2}$$

时达到最小值.

把(4.56)代入(4.54)，得到相应的最大振幅值为

$$H^*_{\max}=\frac{H}{\sqrt{4n^4+4n^2(\omega^2-2n^2)}}=\frac{H}{2n\sqrt{\omega^2-n^2}}$$

就是说，当外力的圆频率 $p=\sqrt{\omega^2-2n^2}$ 时，强迫振动项的振幅达到最大值，这时的圆频率称为**共振频率**，所产生的现象也叫**共振现象**.

在发生共振现象时，一个振动系统在不太大的外力作用下会产生很大振幅的振动，以致引起破坏性的效果. 例如一个电动机固定在一个能作弹性振动的座台上，电动机转动时产生出周期性

的力，这力摇动座台，使座台处在强迫振动的状态中，当外力的频率接近于固有频率时，假定在无阻尼的情形，就会发生共振现象，电动机传给座台很大的能量，因而座台振动的振幅能够增大到使座台损坏的程度. 因此，在工程技术中往往要尽量避免共振现象的发生. 但是，只要我们掌握共振的规律，也可以利用共振为我们服务. 例如，收音机的调频就是利用共振的作用，乐器的构造也是利用共振的原理.

习 题 4.2

1. 证明定理 8 和定理 9.

求解下列常系数线性方程(2～21)：

2. $x^{(4)}-5x''+4x=0$
3. $x'''-3ax''+3a^2x'-a^3x=0$
4. $x^{(5)}-4x'''=0$
5. $x''+2x'+10x=0$
6. $x''+x'+x=0$
7. $s''-a^2s=t+1$
8. $x'''-4x''+5x'-2x=2t+3$
9. $x^{(4)}-2x''+x=t^2-3$
10. $x'''-x=\cos t$
11. $x''+x'-2x=8\sin 2t$
12. $x'''-x=e^t$
13. $s''+2as'+a^2s=e^t$
14. $x''+6x'+5x=e^{2t}$
15. $x''-2x'+3x=e^{-t}\cos t$
16. $x''+x=\sin t-\cos 2t$
17. $x''-4x'+4x=e^t+e^{2t}+1$
18. $x''+9x=t\sin 3t$
19. $x''-2x'+2x=te^t\cos t$
20. $x''+x=\dfrac{1}{\sin^3 t}$

21. $x''+x=1-\frac{1}{\sin t}$

22. 求 $t^2x''+tx'-x=0$ 的通解.

23. 求方程 $t^2x''-4tx'+6x=t$ 的通解.

24. 求方程 $t^2x''-tx'+2x=t\ln t$ 的通解.

25. 求方程 $x''+9x=6e^{3t}$, $x(0)=x'(0)=0$ 的解.

26. 求方程 $x^{(4)}+x=2e^t$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=1$ 的解.

27. 试解第一章 §1.1 例 3 中 R-L-C 电路方程

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{LC}=0$$

28. 火车沿水平的道路运动. 火车的重量是 P, 机车的牵引力是 F, 运动时的阻力 $W=a+bV$, 其中 a、b 是常数, 而 V 是火车的速度; S 是走过的路程. 试确定火车的运动规律, 设 $t=0$ 时 $S=0$, $V=0$.

29. 设 $\varphi(t)$是方程 $x''+k^2x=f(t)$的解, 其中 k 为常数, 函数 $f(t)$于 $0\leqslant t<+\infty$ 连续, 试证:

(1) 当 $k\neq 0$ 时能够选择常数 c_1, c_2 的值, 使得

$$\varphi(t)=c_1\cos kt+\frac{c_2}{k}\sin kt+\frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s)\cdot f(s)ds$$
$$(0\leqslant t<+\infty)$$

(2) 当 $k=0$ 时方程的通解可表为

$$x=c_1+c_2t+\int_0^t(t-s)f(s)ds \quad (0\leqslant t<+\infty)$$

其中 c_1、c_2 为任意常数.

§4.3 高阶方程的降价和幂级数解法

一般的高阶微分方程没有普遍的解法, 处理问题的基本原则是降阶, 利用变换把高阶方程的求解问题化为较低阶的方程来求解. 因为一般说来, 低阶方程的求解会比求解高阶方程方便些. 特别地, 对于二阶(变系数)齐线性方程, 如能知道它的一个非零特解, 则可利用降阶法求得与它线性无关的另一个特解, 从而得到方程的通解; 对于非齐线性方程, 只需再运用常数变易法求出它的一

个特解，问题也就解决了．因此，问题的关键就在于寻找齐线性方程的一个非零特解．本节主要介绍一些可降阶的方程类型和求特解的幂级数解法．

4.3.1 可降阶的一些方程类型

n 阶微分方程一般地可写为

$$F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0$$

下面讨论三类特殊方程的降阶问题．

1）方程不显含未知函数 x，或更一般地，设方程不含 $x,x',\cdots,x^{(k-1)}$，即方程呈形状：

$$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0\quad(1\leqslant k\leqslant n)\tag{4.57}$$

若令 $x^{(k)}=y$，则方程即降为关于 y 的 $n-k$ 阶方程

$$F(t,y,y',\cdots,y^{(n-k)})=0\tag{4.58}$$

如果能够求得方程(4.58)的通解

$$y=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$$

即

$$x^{(k)}=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$$

再经过 k 次积分得到

$$x=\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数．可以验证，这就是方程(4.57)的通解．

特别地，若二阶方程不显含 x（相当于 $n=2,k=1$ 的情形），则用变换 $x'=y$ 便把方程化为一阶方程．

例 1 求方程 $\frac{d^5x}{dt^5}-\frac{1}{t}\frac{d^4x}{dt^4}=0$ 的解．

解 令 $\frac{d^4x}{dt^4}=y$，则方程化为

$$\frac{dy}{dt}-\frac{1}{t}y=0$$

这是一阶方程，积分后得 $y=ct$，即 $\frac{d^4x}{dt^4}=ct$. 于是

$$x=c_1t^5+c_2t^3+c_3t^2+c_4t+c_5$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_5$ 为任意常数，这就是原方程的通解.

2）不显含自变量 t 的方程

$$F(x, x', \cdots, x^{(n)})=0 \tag{4.59}$$

我们指出，若令 $x'=y$，并以它为新未知函数，而视 x 为新自变量，则方程就可降低一阶.

事实上，在所作的假定下，$x'=y$，$x''=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}x'=y\frac{dy}{dx}$，$x'''=y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2\frac{d^2y}{dx^2}$，$\cdots$，采用数学归纳法不难证明，$x^{(k)}$ 可用 $y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$ 表出($k\leqslant n$). 将这些表达式代入(4.59)就得到

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=0$$

这是关于 x, y 的 $n-1$ 阶方程，比原方程(4.59)低一阶.

例2 求解方程 $xx''+(x')^2=0$

解 令 $x'=y$，直接计算可得 $x''=y\frac{dy}{dx}$，于是原方程化为 $xy\frac{dy}{dx}+y^2=0$ 得到 $y=0$或 $x\frac{dy}{dx}+y=0$，积分后得 $y=\frac{c}{x}$，即 $x'=\frac{c}{x}$，所以 $x^2=c_1t+c_2(c_1=2c)$，这就是原方程的通解.

例3 求数学摆的运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{1.17}$$

满足初始条件: $t=0$ 时, $\varphi=\varphi_0>0$, $\frac{d\varphi}{dt}=0$ 的解.

解 令$\frac{d\varphi}{dt}=p$, 则$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=p\frac{dp}{d\varphi}$. 这时, 方程(1.17)变为

$$p\frac{dp}{d\varphi}=-\frac{g}{l}\sin\varphi$$

积分之, 得到

$$\frac{1}{2}p^2=\frac{g}{l}(\cos\varphi+c_1)$$

或者

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{g}{l}(\cos\varphi+c_1) \tag{4.60}$$

这里 c_1 是任意常数. 用初始条件代入(4.60), 得到$c_1=-\cos\varphi_0$. 于是(4.60)变为

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{2g}{l}(\cos\varphi-\cos\varphi_0)$$

将上式开方得到

$$\frac{d\varphi}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0} \tag{4.61}$$

我们先讨论摆从最大的正偏离角 $\varphi=\varphi_0$ 到最大的负偏离角 $\varphi=-\varphi_0$ 之间的第一次摆动的情况, 这时$\frac{d\varphi}{dt}<0$, (4.61)的右端取负号, 得到

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0} \tag{4.62}$$

将方程(4.62)分离变量, 然后积分, 并计及初始条件即得

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=-\int_0^t\sqrt{\frac{2g}{l}}dt=-t\sqrt{\frac{2g}{l}} \tag{4.63}$$

令

$$t_0=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}$$

则(4.63)可写为

$$t_0-t=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}} \tag{4.64}$$

这里 t_0 是代表摆从最大正偏离角 $\varphi=\varphi_0$ 第一次到达 $\varphi=0$ 所需的时间．经过 $2t_0$ 的时间，摆到达最大负偏离角的位置 $\varphi=-\varphi_0$，然后，摆又开始向右端运动，这时 $\frac{d\varphi}{dt}>0$，(4.62)式已不能描述摆的运动了．故所得的解(4.64)只适用于 $0\leqslant t\leqslant 2t_0$ 的区间．对于 $t=2t_0$ 之后的一段时间(4.61)的右端取正号，得到方程

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}$$

积分之，并注意到此时初始条件为 $t=2t_0$ 时 $\varphi=-\varphi_0$，得到

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=\int_{2t_0}^{t}\sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt$$

$$=(t-2t_0)\sqrt{\frac{2g}{l}} \tag{4.65}$$

再注意到

$$\int_0^{-\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=-\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}$$

可将(4.65)写为

$$t-3t_0=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}} \tag{4.66}$$

当 $t=4t_0$ 时，摆又回复到 $\varphi=\varphi_0$，然后又向左端运动．(4.66)在区间 $2t_0\leqslant t\leqslant 4t_0$ 上适用．在 $4t_0\leqslant t\leqslant 6t_0$ 区间上摆的运动又由方程(4.62)描述．摆在 $\varphi=\varphi_0$ 和 $\varphi=-\varphi_0$ 之间作周期性的摆动．所以，我们只需就区间 $0\leqslant t\leqslant 4t_0$ 讨论摆的运动已足够了．摆从 $\varphi=\varphi_0$ 到 $\varphi=-\varphi_0$ 的摆动情况由方程(4.64)描述；而摆从 $\varphi=-\varphi_0$ 再到

$\varphi=\varphi_0$ 的摆动情况由方程(4.66)描述. 积分 $\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}$ 是不能用初等函数表示出来的，这是一个椭圆积分. 我们可将这里得到的结果与前面用 φ 近似 $\sin\varphi$ 所得的线性方程的结果作一个比较，就知此处非线性的情形比线性化了的情形复杂得多了.

3）齐线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

我们知道，方程(4.2)的求解问题归结为寻求方程的 n 个线性无关的特解，但如何求这些特解呢？没有普遍的方法可循. 这是与常系数线性方程的极大差异之处. 但是我们指出，如果知道方程的一个非零特解，则利用变换，可将方程降低一阶；或更一般地，若知道方程的 k 个线性无关的特解，则可通过一系列同类型的变换，使方程降低 k 阶. 并且新得到的 $n-k$ 阶方程也是齐线性的.

事实上，设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是方程(4.2)的 k 个线性无关解，显然 $x_i\neq 0$, $i=1,2,\cdots,k$. 令 $x=x_k y$，直接计算可得

$$x'=x_k y'+x_k' y$$

$$x''=x_k y''+2x_k' y'+x_k'' y$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$x^{(n)}=x_k y^{(n)}+n x_k' y^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}x_k'' y^{(n-2)}+\cdots+x_k^{(n)} y$$

将这些关系式代入(4.2)，得到

$$x_k y^{(n)}+[n x_k'+a_1(t)x_k]y^{(n-1)}+\cdots+$$
$$+[x_k^{(n)}+a_1 x_k^{(n-1)}+\cdots+a_n x_k]y=0$$

这是关于 y 的 n 阶方程，且各项系数是 t 的已知函数，而 y 的系数恒等于零，因为 x_k 是(4.2)的解. 因此，如果引入新未知函数 $z=y'$，并在 $x_k\neq 0$ 的区间上用 x_k 除方程的各项，我们便得到形状如

$$z^{(n-1)}+b_1(t)z^{(n-2)}+\cdots+b_{n-1}(t)z=0 \qquad (4.67)$$

的 $n-1$ 阶齐线性方程.

方程(4.67)的解与(4.2)的解之间的关系，由以上变换知道为 $z=y'=\left(\dfrac{x}{x_k}\right)'$，或 $x=x_k\int z\,dt$. 因此，对于方程(4.67)，我们就知道它的 $k-1$ 个线性无关解 $z_i=\left(\dfrac{x_i}{x_k}\right)'$，$i=1,2,\cdots,k-1$.

事实上，$z_1,z_2,\cdots,z_{k-1}$ 是方程(4.67)的解，这一点是显然的. 假设这 $k-1$ 个解之间存在关系式

$$\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2+\cdots+\alpha_{k-1}z_{k-1}\equiv 0$$

或

$$\alpha_1\left(\frac{x_1}{x_k}\right)'+\alpha_2\left(\frac{x_2}{x_k}\right)'+\cdots+\alpha_{k-1}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)'\equiv 0$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k-1}$ 是常数. 那么，就有

$$\alpha_1\left(\frac{x_1}{x_k}\right)+\alpha_2\left(\frac{x_2}{x_k}\right)+\cdots+\alpha_{k-1}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)\equiv -\alpha_k$$

或

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_{k-1}x_{k-1}+\alpha_k x_k\equiv 0$$

由于 $x_1,x_2,\cdots,\ x_k$ 线性无关，故必有 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$. 这就是说 $z_1,z_2,\cdots,z_{k-1}$ 是线性无关的.

因此，若对方程(4.67)仿以上做法，令 $z=z_{k-1}\int u\,dt$，则可将方程化为关于 u 的 $n-2$ 阶齐线性方程

$$u^{(n-2)}+c_1(t)u^{(n-3)}+\cdots+c_{n-2}(t)u=0 \qquad (4.68)$$

并且还知道方程(4.68)的 $k-2$ 个线性无关解:

$$u_i=\left(\frac{z_i}{z_{k-1}}\right)' \quad i=1,2,\cdots,k-2$$

由上面的讨论我们看到，利用 k 个线性无关特解当中的一个解 x_k，可以把方程(4.2)降低一阶，成为 $n-1$ 阶齐线性方程(4.67)，并且知道它的 $k-1$ 个线性无关解；而利用两个线性无关解

x_{k-1}, x_k, 则可以把方程(4.2)降低两阶, 成为 $n-2$ 阶齐线性方程(4.68), 同时知道它的 $k-2$ 个线性无关解. 依此类推, 继续上面的做法, 若利用了方程的 k 个线性无关解 $x_1, x_2, \cdots, x_k$, 则最后我们就得到一个 $n-k$ 阶的齐线性方程. 这就是说把方程(4.2)降低了 k 阶.

特别地, 对于二阶齐线性方程, 如果知道它的一个非零解, 则方程的求解问题就解决了.

事实上, 设 $x=x_1\neq 0$ 是二阶齐线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=0 \tag{4.69}$$

的解, 则由上面讨论知道, 经变换 $x=x_1\int y\,dt$ 后, 方程就化成

$$x_1\frac{dy}{dt}+[2x_1'+p(t)x_1]y=0$$

这是一阶线性方程. 解之得

$$y=c\frac{1}{x_1^2}e^{-\int p(t)dt}$$

因而

$$x=x_1\left[c_1+c\int\frac{1}{x_1^2}e^{-\int p(t)dt}\,dt\right] \tag{4.70}$$

这里 c, c_1 是任意常数.

取 $c_1=0, c=1$, 我们得到方程(4.69)的一个特解:

$$x=x_1\int\frac{1}{x_1^2}e^{-\int p(t)dt}\,dt$$

它与 x_1 显然是线性无关的, 因为它们之比不等于常数(见习题 4.1 第 1 题). 于是, 表达式(4.70) 是 (4.69)的通解, 它包括了方程(4.69)的所有解.

例 4 已知 $x=\frac{\sin t}{t}$ 是方程 $x''+\frac{2}{t}x'+x=0$ 的解, 试求方程

的通解.

解 这里$p(t)=\frac{2}{t}$，由(4.70)得到

$$x=\frac{\sin t}{t}\left(c_1+c\int\frac{t^2}{\sin^2 t}\cdot\frac{1}{t^2}dt\right)$$

$$=\frac{\sin t}{t}(c_1-c\operatorname{ctg} t)=\frac{1}{t}(c_1\sin t-c\cos t)$$

其中 c_1, c 是任意常数，这就是方程的通解.

4.3.2 二阶线性方程的幂级数解法

由上面讨论知道，二阶变系数齐线性方程的求解问题归结为寻求它的一个非零解. 由于方程的系数是自变量的函数，我们不能象§4.2那样利用代数方法去求解. 但是，从微积分学中知道，在满足某些条件下，可以用幂级数来表示一个函数. 因此，自然想到，能否用幂级数来表示微分方程的解呢？下面就来讨论这一问题. 首先看几个简单的例子. 按照微积分学的一般习惯，这里也以 y 表示未知函数，而以 x 表示自变量.

例 5 求方程$\frac{dy}{dx}=y-x$ 的满足初始条件 $y(0)=0$ 的解.

解 设

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{4.71}$$

为方程的解，这里 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n,\cdots)$是待定常数，由此我们有

$$y'=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

将 y, y' 的表达式代入方程，并比较 x 的同次幂的系数，得到:

$$a_1=a_0,\quad 2a_2=a_1-1, ka_k=a_{k-1}, k\geqslant 3$$

计及 $y(0)=0$，就有 $a_1=a_0=0$, $a_2=-\frac{1}{2}$, $a_3=-\frac{1}{3!}$，利用数学归纳法可以推得，一般地 $a_n=-\frac{1}{n!}$，代入(4.71)得

$$y=-\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)$$
$$=-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)+1+x=1+x-e^x$$

这就是所求的解. 事实上，方程是一阶线性的，容易求得它的通解 $y=ce^x+x+1$，而由条件 $y(0)=0$ 确定常数 $c=-1$，即得方程的解为 $y=1+x-e^x$.

例 6 求解方程

$$x\frac{dy}{dx}=y-x, y(1)=0$$

解 同上例一样，以(4.71)形式上代入方程并比较 x 的同次幂的系数，这时将有

$$a_0=0, a_1=a_1-1, na_n=a_n, n\geqslant 2$$

因为不可能找到有限的 a_1，故方程没有形如(4.71)的解，事实上，直接解方程，可得通解为

$$y=cx-x\ln|x|$$

但若令 $x=t+1$，那么就将上述初值问题化为

$$(1+t)\frac{dy}{dt}=y-(t+1), y(0)=0$$

这时仿例 5 的做法就可求得

$$y=(1+t)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n}=-(1+t)\ln(1+t),\quad |t|<1$$

于是

$$y=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n}=-x\ln x,\quad x>0$$

这就是所求原方程的特解，相当于通解中取 $c=0$.

例 7 求初值问题

$$x^2\frac{dy}{dx}=y-x,\quad y(0)=0$$

的解.

解 同前面一样，以级数(4.71)形式上代入方程并比较 x 的同次幂的系数，计及条件 $y(0)=0$，我们有 $a_0=0$, $a_1-1=0$, $a_2=a_1$, $\cdots$, $a_{n+1}=na_n$, $\cdots$, 或 $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=1$, $\cdots$, $a_n=(n-1)!\cdots$. 将这些确定的值代入(4.71)就得到:

$$y=x+x^2+2!x^3+3!x^4+\cdots+n!x^{n+1}+\cdots$$

此级数对任何 $x\neq0$ 都是发散的，故所给问题没有形如(4.71)的级数解.

例 8 求方程 $y''-2xy'-4y=0$ 的满足初始条件 $y(0)=0$ 及 $y'(0)=1$ 的解.

解 设级数(4.71)为方程的解. 首先，利用初始条件，可以得到

$$a_0=0,\quad a_1=1$$

因而

$$y=x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$
$$y'=1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$
$$y''=2a_2+3\cdot2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$$

将 y, y', y'' 的表达式代入原方程，合并 x 的各同次幂的项，并令各项系数等于零，得到:

$$2a_2=0$$
$$3\cdot2a_3-2-4=0$$
$$4\cdot3a_4-4a_2-4a_2=0$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$n(n-1)a_n-2(n-2)a_{n-2}-4a_{n-2}=0$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

即

$$a_2=0,\ a_3=1,\ a_4=0,\ \cdots,\ a_n=\frac{2}{n-1}a_{n-2},\ \cdots$$

因而

$$a_5=\frac{1}{2!},\quad a_6=0,\quad a_7=\frac{1}{6}=\frac{1}{3!},\quad a_8=0,\quad a_9=\frac{1}{4!},\quad \cdots$$

也即

$$a_{2k+1}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(k-1)!}=\frac{1}{k!},\quad a_{2k}=0$$

对一切正整数 k 成立.

将 $a_i(i=0,1,2,\cdots)$ 的值代回(4.71)就得到

$$\begin{aligned}y&=x+x^3+\frac{x^5}{2!}+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{k!}+\cdots\\&=x\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2k}}{k!}+\cdots\right)=x\mathrm{e}^{x^2}\end{aligned}$$

这就是方程的满足所给初始条件的解.

从上述例子看到，有些方程如例 5 和例 8 的解可表成 x 的幂级数，但另一些方程如例 6 和例 7 的解却不能表为 x 的幂级数形式，它们或者因为级数的系数无法确定，或者因为所得级数不收敛. 究竟方程应该满足什么条件才能保证它的解可用幂级数来表示呢？级数的形式怎样？其收敛区间又如何？这些问题，在微分方程解析理论中有完满的解答，但因讨论时需要涉及解析函数等较专门的知识，在此我们仅叙述有关结果而不加证明，若要了解定理的证明过程，可参阅 B. И. 斯米尔诺夫著，叶彦谦译《高等数学教程》(人民教育出版社)第三卷第三分册第五章.

考虑二阶齐线性方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \tag{4.72}$$

及初始条件 $y(x_0)=y_0$ 及 $y'(x_0)=y'_0$ 的情况.

不失一般性，可设 $x_0=0$，否则，我们引进新变量 $t=x-x_0$，经此变换，方程的形状不变，但这时对应于 $x=x_0$ 的就是 $t_0=0$ 了．因此，今后我们总认为 $x_0=0$．

定理 10 若方程(4.72)中系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都能展成 x 的幂级数，且收敛区间为 $|x|<R$，则方程(4.72)有形如

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \tag{4.73}$$

的特解，也以 $|x|<R$ 为级数的收敛区间．

在例 8 中方程显然满足定理的条件，系数 $-2x$ 和 -4 可看作是在全数轴上收敛的幂级数，故方程的解也在全数轴上收敛，这与例 8 的实际计算结果完全一样．但有些方程，例如 n 阶**贝塞耳(Bessel)方程**

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0 \tag{4.74}$$

这里 n 为非负常数，不一定是正整数．在此 $p(x)=\dfrac{1}{x}$，$q(x)=1-\dfrac{n^2}{x^2}$．显然它不满足定理 10 的条件，因而不能肯定有形如(4.73)的特解．但它满足下述定理 11 的条件，从而具有别种形状的幂级数解．

定理 11 若方程(4.72)中系数 $p(x)$，$q(x)$ 具有这样的性质，即 $xp(x)$ 和 $x^2q(x)$ 均能展成 x 的幂级数，且收敛区间为 $|x|<R$，则方程(4.72)有形如

$$y=x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

即

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{\alpha+n} \tag{4.75}$$

的特解，这里 $a_0\neq 0$①，α 是一个待定的常数．级数(4.75)也以 $|x|<R$ 为收敛区间．

例 9 求解 n 阶贝塞耳方程(4.74)。

解 将方程改写成

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{x^2-n^2}{x^2}y=0$$

易见，它满足定理 11 的条件，且 $xp(x)=1$，$x^2q(x)=x^2-n^2$，按 x 展成的幂级数收敛区间为 $-\infty<x<+\infty$，由定理 11，方程有形如

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{\alpha+k} \tag{4.75}$$

的解，这里 $a_0\neq 0$，而 a_k 和 α 是待定常数．将(4.75)代入(4.74)中，得

$$x^2\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha+k)(\alpha+k-1)a_kx^{\alpha+k-2}$$
$$+x\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha+k)a_kx^{\alpha+k-1}$$
$$+(x^2-n^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{\alpha+k}=0$$

把 x 同幂次项归在一起，上式变为

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(\alpha+k)(\alpha+k-1)+(\alpha+k)-n^2]a_kx^{\alpha+k}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{\alpha+k+2}=0$$

---

① 若 $a_0=0$，或更一般地，$a_i=0$，$i=0,1,2,\cdots,m-1$，但 $a_m\neq 0$，则引入记号 $\beta=\alpha+m$，$b_k=a_{m+k}$，则

$$y=x^{\alpha}\sum_{n=m}^{\infty}a_nx^n=x^{\alpha+m}\sum_{k=0}^{\infty}a_{m+k}x^k=x^{\beta}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$$

这里 $b_0=a_m\neq 0$，而 β 仍为待定常数．

令各项的系数等于零，得一系列的代数方程：

$$\begin{cases} a_0[\alpha^2-n^2]=0 \\ a_1[(\alpha+1)^2-n^2]=0 \\ a_k[(\alpha+k)^2-n^2]+a_{k-2}=0 \\ \qquad k=2,3,\cdots \end{cases} \tag{4.76}$$

因为 $a_0\neq 0$，故从(4.76)的第一个方程解得 α 的两个值

$$\alpha=n \quad 和 \quad \alpha=-n$$

先考虑 $\alpha=n$ 时方程(4.74)的一个特解. 这时我们总可以从(4.76)中逐个地确定所有的系数 a_k. 把 $\alpha=n$ 代入(4.76)，得到

$$a_1=0,$$

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}, \qquad k=2,3,\cdots$$

或按下标为奇数或偶数，我们分别有

$$\begin{cases} a_{2k+1}=\dfrac{-a_{2k-1}}{(2k+1)(2n+2k+1)} \\ a_{2k}=\dfrac{-a_{2k-2}}{2k(2n+2k)} \end{cases} \quad k=1,2,\cdots$$

从而求得

$$a_{2k-1}=0, \qquad k=1,2,\cdots$$

$$a_2=-\frac{a_0}{2^2\cdot 1(n+1)}$$

$$a_4=(-1)^2\frac{a_0}{2^4\cdot 2!(n+1)(n+2)}$$

$$a_6=(-1)^3\frac{a_0}{2^6\cdot 3!(n+1)(n+2)(n+3)}$$

一般地

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}k!(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \quad k=1,2,\cdots$$

将各 a_k 代入(4.75)得到方程(4.74)的一个解

$$y_1=a_0x^n+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}\cdot k!(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}x^{2k+n}$$

(4.77)

既然是求(4.74)的特解，我们不妨令

$$a_0=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$$ ①

而(4.77)变为

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)\cdots(n+1)\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

注意到Γ函数的性质，即有

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\equiv J_n(x)$$

$J_n(x)$是由贝塞耳方程(4.74)定义的特殊函数，称为 n **阶贝塞耳函数**.

因此，对于 n 阶贝塞耳方程，它总有一个特解 $J_n(x)$. 为了求得另一个与 $J_n(x)$线性无关的特解，我们自然想到，求 $\alpha=-n$时方程(4.74)的形如

$$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{-n+k}$$

的解，我们注意到只要 $n\neq$非负整数，象以上对于 $\alpha=n$ 时的求解过程一样，我们总可以求得

---

① 函数 $\Gamma(s)$定义如下:

当 $s>0$ 时，$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$; 当 $s<0$ 且非整数时，由递推公式 $\Gamma(s)=\frac{1}{s}\Gamma(s+1)$定义.

$\Gamma(s)$具有性质:

$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$; $\Gamma(n+1)=n!$, n 为正整数.

$$a_{2k-1}=0,\quad k=1,2,\cdots$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}k!(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+k)},\quad k=1,2,\cdots$$

使之满足(4.76)中的一系列方程，因而

$$y_2=a_0x^{-n}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}k!(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+k)}x^{2k-n} \tag{4.78}$$

是(4.74)的一个特解．此时，若令

$$a_0=\frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}$$

则(4.78)变为

$$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\equiv J_{-n}(x)$$

$J_{-n}(x)$称为$-n$ **阶贝塞耳函数**.

利用达朗贝尔判别法不难验证级数(4.77)和(4.78)对于任何x值(在(4.78)中$x\neq 0$)都是收敛的，因此，当$n\neq$非负整数时，$J_n(x)$和$J_{-n}(x)$都是方程(4.74)的解，而且是线性无关的，因为它们可展为由x的不同幂次开始的级数，从而它们的比不可能是常数．于是方程(4.74)的通解可写为

$$y=c_1J_n(x)+c_2J_{-n}(x)$$

这里c_1, c_2是任意常数.

当$n=$自然数，而$\alpha=-n$时，我们就不能从(4.76)中确定a_{2k} $(k\geqslant n)$，因此不能象上面一样求得方程的通解．这时可以用4.3.1介绍过的降阶法，求出方程的与$J_n(x)$线性无关的特解．事实上，由公式(4.70)直接得到方程(4.74)的通解为:

$$y=J_n(x)\left[c_1+c_2\int\frac{1}{J_n^2(x)}e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx\right]$$

$$=J_n(x)\left[c_1+c_2\int\frac{dx}{xJ_n^2(x)}\right]$$

其中 c_1, c_2 是任意常数.

例 10 求方程 $x^2y''+xy'+\left(4x^2-\frac{9}{25}\right)y=0$ 的通解.

解 引入新变量 $t=2x$, 我们有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}=2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(2\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=4\frac{d^2y}{dt^2}$$

将上述关系式代入原方程，得到

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+\left(t^2-\frac{9}{25}\right)y=0 \tag{4.79}$$

这是 $n=\frac{3}{5}$ 的贝塞耳方程. 由例 9 可知，方程(4.79)的通解可表为

$$y=c_1J_{\frac{3}{5}}(t)+c_2J_{-\frac{3}{5}}(t)$$

代回原来变量, 就得到原方程的通解

$$y=c_1J_{\frac{3}{5}}(2x)+c_2J_{-\frac{3}{5}}(2x)$$

其中 c_1, c_2 是任意常数.

4.3.3 第二宇宙速度计算

作为这一节的应用, 我们来计算发射人造卫星的最小速度, 即所谓第二宇宙速度. 在这个速度下, 物体将摆脱地球的引力, 象地球一样绕着太阳运行, 成为人造行星.

让我们首先建立物体垂直上抛运动的微分方程. 以 M 和 m 分别表示地球和物体的质量. 按牛顿万有引力定律，作用于物体的引力 F (空气阻力忽略不计)为

$$F = k\frac{mM}{r^2} \tag{4.80}$$

这里 r 表示地球的中心和物体重心之间的距离，k 为万有引力常数. 因此，物体运动规律应满足下面微分方程

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -k\frac{mM}{r^2}$$

或

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -k\frac{M}{r^2} \tag{4.81}$$

这里的负号表示物体的加速度是负的.

设地球半径为 R($R = 63\times 10^5$ 米)，物体发射速度为 V_0，因此，当物体刚刚离开地球表面时，我们有 $r = R$，$\frac{dr}{dt} = V_0$，即应取初始条件为

$$当\ t = 0\ 时，r = R,\ \frac{dr}{dt} = V_0$$

方程(4.81)不显含自变量 t，应用 4.3.1 讨论过的方法，即令 $\frac{dr}{dt} = V$，把方程降阶成为一阶方程

$$V\frac{dV}{dr} = -k\frac{M}{r^2}$$

解得

$$\frac{V^2}{2} = kM\frac{1}{r} + c$$

注意到这时初始条件为:

$$r = R\ 时\quad V = V_0$$

利用这些数据即可决定常数 c:

$$c = \frac{V_0^2}{2} - \frac{kM}{R}$$

因而

$$\frac{V^2}{2}=\frac{kM}{r}+\left(\frac{V_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\right) \tag{4.82}$$

因为物体运动速度必须始终保持是正的，即$\frac{V^2}{2}>0$，而随着 r 的不断增大，量$\frac{kM}{r}$变得任意小. 因此，由式(4.82)看到，条件$\frac{V^2}{2}>0$要对所有的 r 都成立，只有不等式

$$\frac{V_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\geqslant 0$$

或

$$V_0\geqslant\sqrt{\frac{2kM}{R}}$$

成立. 因而最小的发射速度由下面式子决定

$$V_0=\sqrt{\frac{2kM}{R}} \tag{4.83}$$

在地球的表面，即 $r=R$ 时，重力加速度为 g($g=9.81$ 米/秒^2) 由此根据(4.80)，就有

$$g=k\frac{M}{R^2}$$

于是 $kM=gR^2$. 以此代入(4.83)得到

$$V_0=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\times 9.81\times 63\times 10^5}\approx 11.2\times 10^3\ 米/秒$$

我们通常所说的第二宇宙速度指的就是 $V_0=11.2$ 公里/秒 这个速度.

习　题　4.3

求解下列方程(1—6)：

1. $x''=\frac{1}{2x'}$(这里 $x'=\frac{dx}{dt}$, $x''=\frac{d^2x}{dt^2}$, 以下同)

2. $xx''-(x')^2+(x')^3=0$

3. $x''+\frac{2}{1-x}(x')^2=0$

4. $x''+\sqrt{1-(x')^2}=0$

5. $ax''+[1+(x')^2]^{3/2}=0$（常数 $a\neq0$）

6. $x''-\frac{1}{t}x'+(x')^2=0$（提示：方程两端除以 x'）

用幂级数解法求解下列方程(7—9)：

7. $x''+tx'+x=0, x(0)=0, x'(0)=1$

8. $x''-tx=0, x(0)=1, x'(0)=0$

9. $x''-tx'-x=0$

10. 求解贝塞耳方程

$$t^2x''+tx'+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)x=0\quad\left(\text{提示：}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\right)$$

11. 一个物体在大气中降落，初速度为零，空气阻力与速度的平方成正比例，求该物体的运动规律.

12. 试证：对于二阶齐线性方程

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0$$

其中 $p(t), q(t)$ 为连续函数

i) 若 $p(t)\equiv-tq(t)$，则 $x=t$ 是方程的解；

ii) 若存在常数 m 使得 $m^2+mp(t)+q(t)\equiv0$，则方程有解 $x=e^{mt}$.

13. 求解方程 $tx''-2(1+t)x'+(2+t)x=0\quad(t\neq0)$.

14. 假设 $\varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k})$ 是方程(4.58)的通解，而函数 $\psi(t, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是 $x^{(k)}=\varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k})$ 的通解，试证 $\psi(t, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 就是方程(4.57)的通解，这里 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}, \cdots, c_n$ 为任意常数.

本章学习要点

本章着重介绍了线性微分方程的基本理论和求解方法，主要结论可概括如下：

一　关于解的性质

线性方程的解的性质，主要是：(1)齐线性方程的解的叠加性；(2)非齐线性方程的解的叠加性；(3) n 阶齐线性方程的所有解构

成一个 n 维线性空间;(4)基本解组的以任意常数为系数的线性组合构成齐线性方程的通解;(5)非齐线性方程的通解可表为它的一个特解与对应齐线性方程的通解之和;(6)线性方程的通解包括了该方程的所有解. 这些性质是线性方程所特有的.

二 关于求解的方法

关于线性方程的解法,我们主要介绍了五种较常用的方法,它们是: (1)求常系数齐线性方程的基本解组的特征根法(或欧拉待定指数函数法); (2)求常系数非齐线性方程的特解的待定系数法和拉普拉斯变换法;(3) 求一般非齐线性方程特解的常数变易法;(4)求一般二阶齐线性方程的特解的幂级数解法.

特征根法的要点是把微分方程的求解问题化为代数方程的求根问题; 拉普拉斯变换法则首先将线性微分方程转换成复变数的代数方程,再由拉普拉斯变换表或反变换公式求出微分方程的解;待定系数法用于方程右端 $f(t)$ 是某些基本函数的情况,常见的有:多项式、指数函数、正弦(或余弦)函数以及它们的某种乘积组合.待定系数法和特征根法的特点就在于不需通过积分运算, 而只要解代数方程或加上微分运算即可求得微分方程的解. 我们一定要记住常系数线性微分方程所固有的这种特性.

幂级数解法的思想和待定系数法有类似之处,所不同者,前者待定的是级数的系数,因而通常计算量较大.

不同的方法用于不同的方程类型, 这是应用时必须特别注意之点.

第五章　线性微分方程组

本章研究线性微分方程组的理论，我们将会看到稍为复杂些的物理系统(例如二个或二个以上回路电流变化规律，几个互相作用的质点的运动等等)的数学模型会导出多于一个微分方程的方程组. 通过某些简化的假设，在相当广泛的问题里，这种方程组可以化为一阶线性微分方程组. 类似于第四章所指出过的，在微分方程的理论中，线性微分方程组是非常值得重视的一部分内容. 为了研究这些线性微分方程组，我们引进向量和矩阵的记号，并广泛利用线性代数(向量空间和矩阵代数)的结果. 很多微分方程的理论只有藉助于线性代数的知识才可以作出适当和充分的解释，希望读者能很好地领会这一章的内容. 作为本章所得的每一个结果的特殊情形，都可以得到第四章已讨论过的高阶线性微分方程的一个相应结果.

§5.1　存在唯一性定理

5.1.1　记号和定义

我们考察形如

$$\begin{cases} x_1'=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\cdots+a_{1n}(t)x_n+f_1(t) \\ x_2'=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\cdots+a_{2n}(t)x_n+f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)x_n+f_n(t) \end{cases} \tag{5.1}$$

的一阶线性微分方程组，其中已知函数 $a_{ij}(t)(i,j=1,2,\cdots,n)$和 $f_i(t)(i=1, 2, \cdots, n)$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是连续的. 方程组(5.1)关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及 $x_1', x_2', \cdots, x_n'$是线性的.

我们引进下面的记号.

$$
A(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \tag{5.2}
$$

这里 $A(t)$是 $n\times n$ 矩阵，它的元素是 n^2 个函数 $a_{ij}(t)$，i，$j=1$，2，$\cdots$，n.

$$
f(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \qquad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad x'=\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \tag{5.3}
$$

这里 $f(t)$, x, x'是 $n\times 1$ 矩阵或 n 维列向量.

注意，矩阵相加、矩阵相乘、矩阵与纯量相乘等等性质对于以函数作为元素的矩阵同样成立. 这样一来，方程组(5.1)可以写成下面的形式

$$
x'=A(t)x+f(t) \tag{5.4}
$$

我们引进下面的概念.

一个矩阵或者一个向量在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上称为**连续的**，如果它的每一个元素都是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数.

一个 $n\times n$ 矩阵 $B(t)$或者一个 n 维列向量 $u(t)$:

$$
B(t)=\begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nn}(t) \end{bmatrix}
$$

$$
u(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}
$$

在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上称为**可微的**，如果它的每一个元素都在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上可微．它们的导数分别由下式给出:

$$\boldsymbol{B}'(t)=\begin{bmatrix} b'_{11}(t) & b'_{12}(t) & \cdots & b'_{1n}(t) \\ b'_{21}(t) & b'_{22}(t) & \cdots & b'_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b'_{n1}(t) & b'_{n2}(t) & \cdots & b'_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}'(t)=\begin{bmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \\ \vdots \\ u'_n(t) \end{bmatrix}$$

不难证明，如果 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$ 及 n 维向量 $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$ 是可微的，那么下列等式成立:

(I) $(\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))'=\boldsymbol{A}'(t)+\boldsymbol{B}'(t)$

$(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}(t))'=\boldsymbol{u}'(t)+\boldsymbol{v}'(t)$

(II) $(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t))'=\boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}'(t)$

(III) $(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t))'=\boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}'(t)$

类似地，矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$ 或者向量 $\boldsymbol{u}(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上称为**可积的**，如果它的每一个元素都在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上可积．它们的积分分别由下式给出:

$$\int_a^b \boldsymbol{B}(t)dt=\begin{bmatrix} \int_a^b b_{11}(t)dt & \int_a^b b_{12}(t)dt & \cdots & \int_a^b b_{1n}(t)dt \\ \int_a^b b_{21}(t)dt & \int_a^b b_{22}(t)dt & \cdots & \int_a^b b_{2n}(t)dt \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_a^b b_{n1}(t)dt & \int_a^b b_{n2}(t)dt & \cdots & \int_a^b b_{nn}(t)dt \end{bmatrix}$$

$$\int_a^b \boldsymbol{u}(t)\,dt=\begin{bmatrix}\int_a^b u_1(t)\,dt\\ \int_a^b u_2(t)\,dt\\ \vdots\\ \int_a^b u_n(t)\,dt\end{bmatrix}$$

现在我们给出(5.4)的解的定义:

定义 1 设 $A(t)$是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{f}(t)$ 是同一区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 n 维向量. 方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{5.4}$$

在某区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$(这里$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$)的解就是向量 $\boldsymbol{u}(t)$, 它的导数 $\boldsymbol{u}'(t)$在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上连续且满足

$$\boldsymbol{u}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{f}(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

现在考虑带有初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的方程组(5.4), 这里 t_0是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的已知数, $\boldsymbol{\eta}$ 是 n 维欧几里得(Euclid)空间的已知向量, 在这样条件下求解方程组称为初值问题.

定义 2 初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta} \tag{5.5}$$

的解就是方程组(5.4)在包含 t_0的区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的解 $\boldsymbol{u}(t)$, 使得 $\boldsymbol{u}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$.

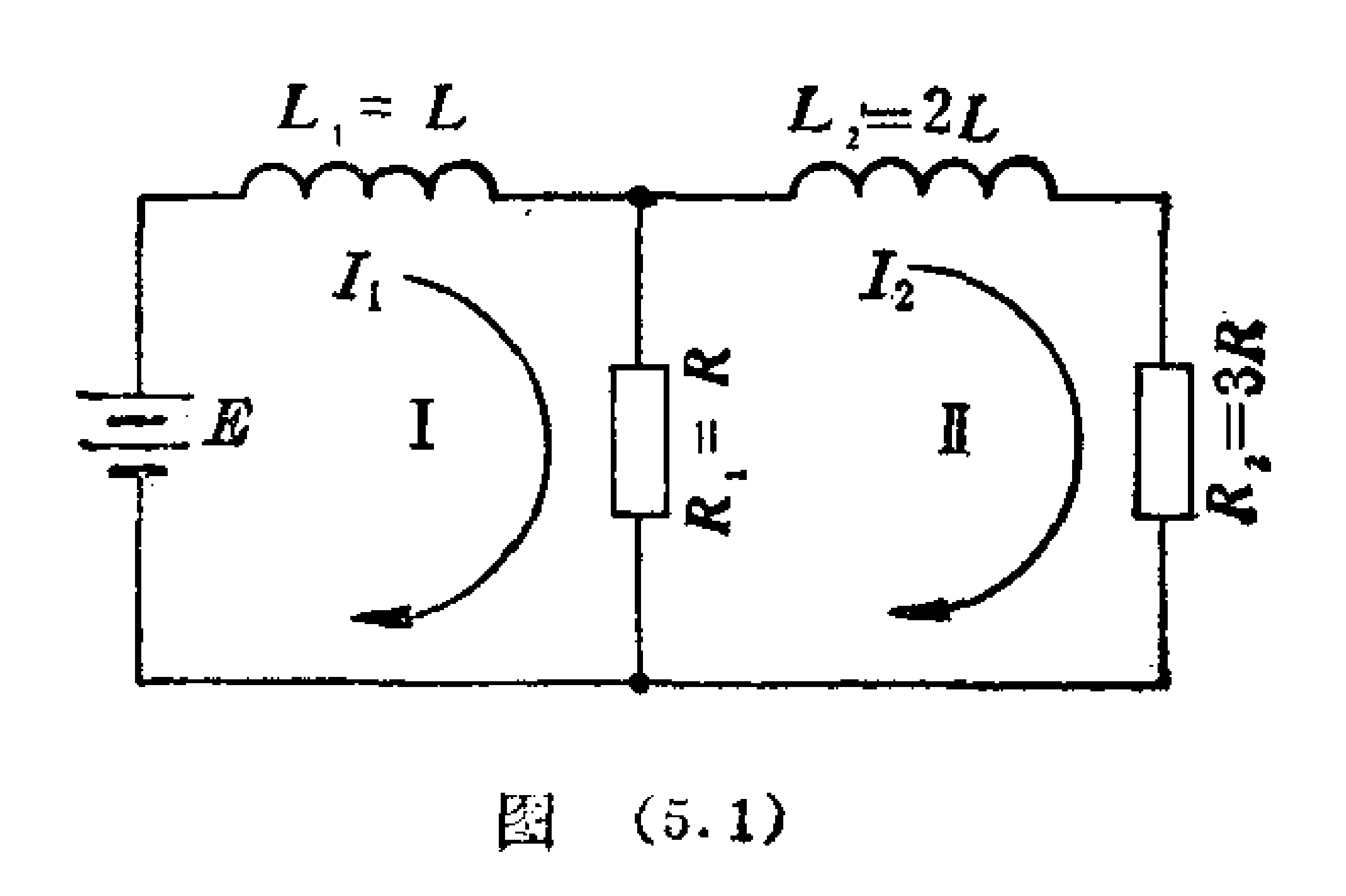


图 (5.1)

例 1 试列出图(5.1)中经过 L_1 及 L_2 的电流 I_1 及 I_2 应满足的微分方程.

解 对回路 I 及回路 II 应用基尔霍夫第二定律(参看第一章§1.1 例 2),得到下列方程组:

$$\begin{cases} L\dfrac{dI_1}{dt}+R(I_1-I_2)=E \\ 2L\dfrac{dI_2}{dt}+3RI_2+R(I_2-I_1)=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{dI_1}{dt}=-\dfrac{R}{L}I_1+\dfrac{R}{L}I_2+\dfrac{E}{L} \\ \dfrac{dI_2}{dt}=\dfrac{R}{2L}I_1-\dfrac{2R}{L}I_2 \end{cases}$$

这是一个含有两个未知数 I_1 和 I_2 的一阶线性微分方程组,为了求得电流 I_1 和 I_2 就应该求解这个微分方程组.

如果令

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & \dfrac{R}{L} \\ \dfrac{R}{2L} & -\dfrac{2R}{L} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} \dfrac{E}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

那末上面方程组就可以写成(5.4)的形式:

$$\boldsymbol{I}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}+\boldsymbol{f}$$

例 2 验证向量

$$\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

是初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

在区间 $-\infty<t<+\infty$ 上的解.

解 显然

$$\boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix} e^0 \\ -e^0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

因为 e^{-t} 和 $-e^{-t}$ 处处有连续导数，我们得到

$$\boldsymbol{u}'(t)=\begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)$$

因此 $\boldsymbol{u}(t)$是给定初值问题的解.

正如在第二章所看到的，当 $n=1$ 时，我们可以得到初值问题(5.5)的解的明显表达式，当 $n\geqslant 2$ 时，情况就复杂多了.

在第四章中，我们讨论了带有初始条件的 n 阶线性微分方程的问题. 现在进一步指出，可以通过下面的方法，将 n 阶线性微分方程的初值问题化为形如(5.5)的线性微分方程组的初值问题.

考虑 n 阶线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases} x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t) \\ x(t_0)=\eta_1,\ x'(t_0)=\eta_2,\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0)=\eta_n \end{cases} \tag{5.6}$$

其中 $a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t)$, $f(t)$是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的已知连续函数，$t_0\in[a, b]$, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是已知常数. 我们指出，它可以化为下列线性微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{x}(t_0)=\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{\eta} \end{cases} \tag{5.7}$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\qquad\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}$$

事实上，令

$$x_1=x,\ x_2=x',\ x_3=x'',\ \cdots,\ x_n=x^{(n-1)}$$

这时

$$x_1'=x'=x_2$$
$$x_2'=x''=x_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-1}'=x^{(n-1)}=x_n$$
$$x_n'=x^{(n)}=-a_n(t)x_1-a_{n-1}(t)x_2-\cdots-a_1(t)x_n+f(t)$$

而且

$$x_1(t_0)=x(t_0)=\eta_1,\ x_2(t_0)=x'(t_0)=\eta_2,\ \cdots,$$
$$x_n(t_0)=x^{(n-1)}(t_0)=\eta_n$$

现在假设 $\psi(t)$是在包含 t_0的区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上(5.6)的任一解．由此，我们得知 $\psi(t)$，$\psi'(t)$，$\cdots$，$\psi^{(n)}(t)$在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上存在、连续、满足方程(5.6)且 $\psi(t_0)=\eta_1$，$\psi'(t_0)=\eta_2$，$\cdots$，$\psi^{(n-1)}(t_0)=\eta_n$．令

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\\varphi_2(t)\\\vdots\\\varphi_n(t)\end{bmatrix}$$

其中 $\varphi_1(t)=\psi(t)$，$\varphi_2(t)=\psi'(t)$，$\cdots$，$\varphi_n(t)=\psi^{(n-1)}(t)(a\leqslant t\leqslant b)$．那么，显然有 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$．此外，我们还得到

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1'(t)\\ \varphi_2'(t)\\ \vdots\\ \varphi_{n-1}'(t)\\ \varphi_n'(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi'(t)\\ \psi''(t)\\ \vdots\\ \psi^{(n-1)}(t)\\ \psi^{(n)}(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varphi_2(t)\\ \varphi_3(t)\\ \vdots\\ \varphi_n(t)\\ -a_1(t)\psi^{(n-1)}(t)-\cdots-a_n(t)\psi(t)+f(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varphi_2(t)\\ \varphi_3(t)\\ \vdots\\ \varphi_n(t)\\ -a_n(t)\varphi_1(t)-\cdots-a_1(t)\varphi_n(t)+f(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \vdots\\ \varphi_{n-1}(t)\\ \varphi_n(t)\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ f(t)\end{bmatrix}$$

这就表示这个特定的向量 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是(5.7) 的解. 反之，假设向量 $\boldsymbol{u}(t)$是在包含 t_0的区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上(5.7)的解. 令

$$\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\\vdots\\u_n(t)\end{bmatrix}$$

并定义函数 $w(t)=u_1(t)$，由(5.7)的第一个方程，我们得到 $w'(t)=u_1'(t)=u_2(t)$，由第二个方程得到 $w''(t)=u_2'(t)=u_3(t)$，…，由第 $n-1$ 个方程得到 $w^{(n-1)}(t)=u_{n-1}'(t)=u_n(t)$，由第 n 个方程得到

$$\begin{aligned}w^{(n)}(t)=u_n'(t)&=-a_n(t)u_1(t)-a_{n-1}(t)u_2(t)-\cdots\\&\quad-a_2(t)u_{n-1}(t)-a_1(t)u_n(t)+f(t)\\&=-a_1(t)w^{(n-1)}(t)-a_2(t)w^{(n-2)}(t)-\cdots\\&\quad-a_n(t)w(t)+f(t)\end{aligned}$$

由此即得

$$\begin{aligned}&w^{(n)}(t)+a_1(t)w^{(n-1)}(t)+a_2(t)w^{(n-2)}(t)\\&\quad+\cdots+a_n(t)w(t)=f(t)\end{aligned}$$

同时，我们也得到

$$w(t_0)=u_1(t_0)=\eta_1,\ \cdots,\ w^{(n-1)}(t_0)=u_n(t_0)=\eta_n$$

这就是说，$w(t)$是(5.6)的一个解.

总之，由上面的讨论，我们已经证明了初值问题(5.6)与(5.7)在下面的意义下是**等价的**：给定其中一个初值问题的解，我们可以构造另一个初值问题的解.

值得指出的是：每一个 n 阶线性微分方程可化为 n 个一阶线性微分方程构成的方程组，反之却不成立. 例如方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

不能化为一个二阶微分方程.

5.1.2 存在唯一性定理

本节我们研究初值问题

$$x' = A(t)x + f(t), x(t_0) = \eta \tag{5.5}$$

的解的存在唯一性定理. 类似于第三章, 我们通过五个小命题, 采用逐步逼近法来证明定理. 因为现在讨论的是方程组（写成向量的形式), 所以有些地方稍为复杂些, 而且要引进向量、矩阵的"范数"及向量函数序列的收敛性等概念; 然而由于方程是线性的, 所以有些地方又显得简单些, 而且结论也加强了. 总之, 我们要比较第三章中的证明和现在的证明的异同, 从对比中加深对问题的理解.

对于 $n\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 和 n 维向量 $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, 我们定义它的范数为

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

设 A, B 是 $n\times n$ 矩阵, x, y 是 n 维向量, 这时容易验证下面两个性质:

1° $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$

$\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$

2° $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

向量序列 $\{x_k\}$, $x_k=\begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix}$, 称为**收敛的**, 如果对每一个 i ($i=$

$1, 2, \cdots, n$)数列$\{x_{ik}\}$都是收敛的.

向量函数序列$\{\boldsymbol{x}_k(t)\}$, $\boldsymbol{x}_k(t)=\begin{bmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{bmatrix}$称为在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上**收敛的(一致收敛的)**, 如果对于每一个 $i(i=1, 2, \cdots, n)$函数序列$\{x_{ik}(t)\}$在区间$a\leqslant t\leqslant b$上是收敛的(一致收敛的). 易知, 区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续向量函数序列$\{\boldsymbol{x}_k(t)\}$的一致收敛极限向量函数仍是连续的.

向量函数级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{x}_k(t)$称为在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是**收敛的(一致收敛的)**, 如果其部分和作成的向量函数序列在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是收敛的(一致收敛的).

判别通常的函数级数的一致收敛性的维氏判别法对于向量函数级数也是成立的, 这就是说, 如果

$$\|\boldsymbol{x}_k(t)\|\leqslant M_k, a\leqslant t\leqslant b$$

而级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}M_k$ 是收敛的, 则$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{x}_k(t)$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是一致收敛的.

积分号下取极限的定理对于向量函数也成立, 这就是说, 如果连续向量函数序列$\{\boldsymbol{x}_k(t)\}$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是一致收敛的, 则

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b\boldsymbol{x}_k(t)dt=\int_a^b\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k(t)dt$$

注意, 以上谈到的是向量序列的有关定义和结果, 对于一般矩阵序列, 可以得到类似的定义和结果.

例如, $n\times n$ 矩阵序列$\{\boldsymbol{A}_k\}$, 其中 $\boldsymbol{A}_k=[a_{ij}^{(k)}]_{n\times n}$, 称为**收敛的**, 如果对于一切 $i, j=1, 2, \cdots, n$, 数列$\{a_{ij}^{(k)}\}$都是收敛的.

无穷矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_k + \cdots$$

称为**收敛的**，如果它的部分和所成序列是收敛的.

如果对于每一个整数 k,

$$\|\boldsymbol{A}_k\| \leqslant M_k$$

而数值级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 是收敛的，则 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$ 也是收敛的.

同样，可以给出无穷矩阵函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k(t)$ 的一致收敛性的定义和有关结果.

关于矩阵序列的有关定义和结果，我们在 5.3.1 中将会用到.

总之，上述一切都是数学分析有关概念和结果的自然推广，证明也和数学分析相类似. 读者可以作为练习详细推演一下.

现在讨论存在唯一性定理.

定理 1（存在唯一性定理） 如果 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $n \times n$ 矩阵. $\boldsymbol{f}(t)$ 是 n 维列向量，它们都在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上连续，则对于区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的任何数 t_0 及任一常数向量

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$$

方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \tag{5.4}$$

存在唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，定义于整个区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上，且满足初始条件

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$$

类似于第三章，我们分成五个小命题来证明.

命题 1 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是方程组(5.4)的定义于区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上且满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解, 则 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是积分方程

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}[\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{f}(s)]ds, a\leqslant t\leqslant b \quad (5.8)$$

的定义于 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续解. 反之亦然.

证明完全类似于第三章, 兹不赘述.

现在取 $\boldsymbol{\varphi}_0(t)=\boldsymbol{\eta}$, 构造皮卡逐步逼近向量函数序列如下:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varphi}_0(t)=\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{\varphi}_k(t)=\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}[\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s)+\boldsymbol{f}(s)]ds, \quad a\leqslant t\leqslant b\\ \qquad k=1,2,\cdots\end{cases} \quad (5.9)$$

向量函数 $\boldsymbol{\varphi}_k(t)$ 称为(5.4) 的**第 k 次近似解**. 应用数学归纳法立刻推得命题 2:

命题 2 对于所有的正整数 k, 向量函数 $\boldsymbol{\varphi}_k(t)$在区间$a\leqslant t\leqslant b$ 上有定义且连续.

命题 3 向量函数序列 $\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是一致收敛的.

证明 考虑向量函数级数

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t)+\sum_{j=1}^{\infty}[\boldsymbol{\varphi}_j(t)-\boldsymbol{\varphi}_{j-1}(t)], a\leqslant t\leqslant b \quad (5.10)$$

由于级数(5.10)的部分和为

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t)+\sum_{j=1}^{k}[\boldsymbol{\varphi}_j(t)-\boldsymbol{\varphi}_{j-1}(t)]=\boldsymbol{\varphi}_k(t)$$

因此, 要证明序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上一致收敛, 只须证明级数(5.10)在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上一致收敛就够了. 因为 $\boldsymbol{A}(t)$ 和$\boldsymbol{f}(t)$都在闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续, 所以$\|\boldsymbol{A}(t)\|$ 和$\|\boldsymbol{f}(t)\|$都在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有界. 设 L 和K是大于零的常数, 使得

$$\|A(t)\| \leqslant L, \|f(t)\| \leqslant K, a \leqslant t \leqslant b$$

并取 $M = L\|\eta\| + K$. 下面我们只证明序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 在区间 $t_0 \leqslant t \leqslant b$ 上一致收敛，在区间 $a \leqslant t \leqslant t_0$ 上一致收敛可以类似地加以证明. 为此，我们进行如下的估计. 由(5.9)有

$$\begin{aligned}\|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(s)\varphi_0(s) + f(s)\| ds \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} [\|A(s)\varphi_0(s)\| + \|f(s)\|] ds \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} [L\|\eta\| + K] ds = M(t - t_0)\end{aligned} \tag{5.11}$$

及

$$\|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(s)[\varphi_1(s) - \varphi_0(s)]\| ds$$

利用(5.11)得到

$$\|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\| \leqslant L\int_{t_0}^{t} M(s - t_0) ds = \frac{ML}{2!}(t - t_0)^2$$

现设

$$\|\varphi_j(t) - \varphi_{j-1}(t)\| \leqslant \frac{ML^{j-1}}{j!}(t - t_0)^j$$

成立，则由(5.9)当 $t_0 \leqslant t \leqslant b$ 时，有

$$\begin{aligned}\|\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)\| &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(s)[\varphi_j(s) - \varphi_{j-1}(s)]\| ds \\ &\leqslant L\int_{t_0}^{t} \frac{ML^{j-1}}{j!}(s - t_0)^j ds = \frac{ML^j}{(j+1)!}(t - t_0)^{j+1}\end{aligned}$$

于是，由数学归纳法得到，对于所有的正整数 k，有如下的估计:

$$\|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)\| \leqslant \frac{ML^{k-1}}{k!}(t - t_0)^k, \ t_0 \leqslant t \leqslant b \tag{5.12}$$

由此可知，当 $t_0 \leqslant t \leqslant b$ 时，

$$\|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)\| \leqslant \frac{ML^{k-1}}{k!}(b - t_0)^k \tag{5.13}$$

但是,(5.13)的右端是正项收敛级数

$$\frac{M}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L^k(b-t_0)^k}{k!}$$

的一般项,故由向量函数级数一致收敛的维氏判别法,级数(5.10)在$t_0\leqslant t\leqslant b$上一致收敛,因而向量函数序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$也在$t_0\leqslant t\leqslant b$上一致收敛. 命题3证毕.

现设

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{\varphi}_k(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)$$

因为$\boldsymbol{\varphi}(t)$是$\boldsymbol{\varphi}_k(t)$的一致收敛极限函数,所以$\boldsymbol{\varphi}(t)$也在区间$a\leqslant t\leqslant b$上连续.

命题4 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是积分方程(5.8)的定义在区间$a\leqslant t\leqslant b$上的连续解.

证明 由$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$在$a\leqslant t\leqslant b$上一致收敛于$\boldsymbol{\varphi}(t)$,以及$\boldsymbol{A}(t)$的连续性,推知序列$\{\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_k(s)\}$在区间$a\leqslant s\leqslant b$上一致收敛于$\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}(s)$.

对于(5.9)两边取极限得到

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{\varphi}_k(t)&=\boldsymbol{\eta}+\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t}[\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s)+\boldsymbol{f}(s)]ds\\&=\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}[\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s)+\boldsymbol{f}(s)]ds\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}[\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}(s)+\boldsymbol{f}(s)]ds$$

这就是说,$\boldsymbol{\varphi}(t)$是积分方程(5.8)的定义在区间$a\leqslant t\leqslant b$上的连续解. 命题4证毕.

命题5 设$\boldsymbol{\psi}(t)$是积分方程(5.8)的定义于$a\leqslant t\leqslant b$上的另一个连续解,则$\boldsymbol{\varphi}(t)\equiv\boldsymbol{\psi}(t)\quad(a\leqslant t\leqslant b)$.

证明 我们首先证明 $\psi(t)$ 也是序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的一致收敛极限函数. 根据(5.9)及

$$\psi(t)\equiv\eta+\int_{t_0}^{t}[A(s)\psi(s)+f(s)]ds$$

象命题 3 进行的估计一样, 可以得到下面的估计式

$$\|\varphi_k(t)-\psi(t)\|\leqslant\frac{\widetilde{M}L^k}{(k+1)!}(t-t_0)^{k+1},\quad (t_0\leqslant t\leqslant b)$$

因此, 在 $t_0\leqslant t\leqslant b$ 上, 有

$$\|\varphi_k(t)-\psi(t)\|\leqslant\frac{\widetilde{M}L^k}{(k+1)!}(b-t_0)^{k+1}$$

我们知道, 以 $\frac{\widetilde{M}L^k}{(k+1)!}(b-t_0)^{k+1}$ 为公项的级数是收敛的, 故当 $k\to\infty$ 时 $\frac{\widetilde{M}L^k}{(k+1)!}(b-t_0)^{k+1}\longrightarrow 0$, 因而 $\varphi_k(t)$ 在 $t_0\leqslant t\leqslant b$ 上一致收敛于 $\psi(t)$. 根据极限的唯一性, 即得

$$\varphi(t)\equiv\psi(t)\quad t_0\leqslant t\leqslant b$$

对于 $a\leqslant t\leqslant t_0$, 可以类似地证明. 命题 5 证毕.

综合命题 1—5, 即得到存在唯一性定理的证明.

值得指出的是, 关于线性微分方程组的解 $\varphi(t)$ 的定义区间是系数矩阵 $A(t)$ 和非齐次项 $f(t)$ 在其上连续的整个区间 $a\leqslant t\leqslant b$. 在构造逐步逼近函数序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 时, $\varphi_k(t)$ 的定义区间已经是整个 $a\leqslant t\leqslant b$, 不象第三章对于一般方程那样, 解只存在于 t_0 的某个邻域, 然后经过延拓才能使解定义在较大的区间.

注意到 5.1.1 中关于 n 阶线性方程的初值问题 (5.6) 与线性微分方程组的初值问题 (5.7) 的等价性的论述, 立即由本节的存在唯一性定理可以推得关于 n 阶线性微分方程的解的存在唯一性定理.

推论(即第四章的定理 1)

如果 $a_1(t), \cdots, a_n(t), f(t)$都是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数，则对于区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的任何数 t_0 及任何的 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$, 方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t)$$

存在唯一解 $w(t)$, 定义于整个区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上且满足初始条件:

$$w(t_0)=\eta_1, w'(t_0)=\eta_2, \cdots, w^{(n-1)}(t_0)=\eta_n$$

习 题 5.1

1. 给定方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{*}$$

a) 试验证 $\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}(t)=\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ 分别是方程组(*)的满足初始条件 $\boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$的解.

b) 试验证 $\boldsymbol{w}(t)=c_1\boldsymbol{u}(t)+c_2\boldsymbol{v}(t)$是方程组(*)的满足初始条件 $\boldsymbol{w}(0)=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$的解, 其中 c_1, c_2 是任意常数.

2. 将下面的初值问题化为与之等价的一阶方程组的初值问题:

a) $x''+2x'+7tx=e^{-t}, x(1)=7, x'(1)=-2$

b) $x^{(4)}+x=te^t, x(0)=1, x'(0)=-1, x''(0)=2, x'''(0)=0$

c) $\begin{cases} x''+5y'-7x+6y=e^t \\ y''-2y+13y'-15x=\cos t \end{cases}$

$$x(0)=1, x'(0)=0, y(0)=0, y'(0)=1$$

(提示: 令 $w_1=x, w_2=x', w_3=y, w_4=y'$)

3. 试用逐步逼近法求方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

满足初始条件

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

的第三次近似解.

§5.2 线性微分方程组的一般理论

现在讨论线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{5.14}$$

的一般理论，主要是研究它的解的结构问题.

如果 $\boldsymbol{f}(t)\not\equiv\boldsymbol{0}$，则(5.14)称为**非齐线性的**.

如果 $\boldsymbol{f}(t)\equiv\boldsymbol{0}$，则方程的形式为

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \tag{5.15}$$

(5.15)称为**齐线性的**. 通常(5.15)称为**对应于(5.14)的齐线性方程组**.

5.2.1 齐线性微分方程组

本段主要研究齐线性方程组(5.15)的所有解的集合的代数结构问题. 我们假设矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是连续的.

设 $\boldsymbol{u}(t)$和 $\boldsymbol{v}(t)$是(5.15)的任意两个解，α和β是两个任意常数. 根据向量函数的微分法则，即知 $\alpha\boldsymbol{u}(t)+\beta\boldsymbol{v}(t)$也是(5.15)的解，由此得到齐线性方程组的叠加原理.

定理 2 (叠加原理) 如果 $\boldsymbol{u}(t)$和 $\boldsymbol{v}(t)$是(5.15)的解，则它们的线性组合 $\alpha\boldsymbol{u}(t)+\beta\boldsymbol{v}(t)$也是(5.15)的解，这里 α,β 是任意常数.

定理 2 说明，(5.15)的所有解的集合构成一个线性空间. 自然要问：此空间的维数是多少呢？为此，我们引进向量函数$\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$, …, $\boldsymbol{x}_m(t)$线性相关与线性无关的概念.

我们称定义在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$, …, $\boldsymbol{x}_m(t)$是**线性相关的**，如果存在不全为零的常数 $c_1, c_2\cdots, c_m$, 使得

恒等式

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m(t)\equiv\mathbf{0},\ a\leqslant t\leqslant b$$

成立;否则,称 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_m(t)$为**线性无关**的.

例如，对于任一整数 $k>0$，下面的 $k+1$ 个向量函数(n 维向量)

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}t\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}t^2\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots\quad\begin{bmatrix}t^k\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

在任何区间上都是线性无关的,而向量函数

$$\begin{bmatrix}\cos^2 t\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}\sin^2 t-1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

在任何区间上都是线性相关的.

设有 n 个定义在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的向量函数

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\begin{bmatrix}x_{11}(t)\\x_{21}(t)\\\vdots\\x_{n1}(t)\end{bmatrix},\cdots\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)=\begin{bmatrix}x_{1n}(t)\\x_{2n}(t)\\\vdots\\x_{nn}(t)\end{bmatrix}$$

由这 n 个向量函数构成的行列式

$$W[\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)]$$

$$\equiv W(t)\equiv\begin{vmatrix}x_{11}(t)&x_{12}(t)&\cdots&x_{1n}(t)\\x_{21}(t)&x_{22}(t)&\cdots&x_{2n}(t)\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\x_{n1}(t)&x_{n2}(t)&\cdots&x_{nn}(t)\end{vmatrix}$$

称为这些向量函数的伏朗斯基行列式.

定理3 如果向量函数 $x_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$, …, $\boldsymbol{x}_n(t)$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性相关，则它们的伏朗斯基行列式 $W(t)\equiv 0$, $a\leqslant t\leqslant b$.

证明 由假设可知存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)\equiv\boldsymbol{0},\ a\leqslant t\leqslant b \tag{5.16}$$

把(5.16)看成是以 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为未知量的齐次线性代数方程组，这方程组的系数行列式就是 $x_1(t)$, $x_2(t), \cdots, x_n(t)$的伏朗斯基行列式 $W(t)$. 由齐次线性代数方程组的理论知道，要此方程组有非零解，则它的系数行列式应为零，即

$$W(t)\equiv 0,\ a\leqslant t\leqslant b$$

定理证毕.

定理4 如果(5.15)的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$线性无关，那么，它们的伏朗斯基行列式 $W(t)\neq 0$, $a\leqslant t\leqslant b$.

证明 我们采用反证法. 设有某一个 t_0, $a\leqslant t_0\leqslant b$, 使得 $W(t_0)=0$. 考虑下面的齐次线性代数方程组:

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t_0)=\boldsymbol{0} \tag{5.17}$$

它的系数行列式就是 $W(t_0)$, 因为 $W(t_0)=0$, 所以(5.17) 有非零解 $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$, …, $\tilde{c}_n$. 以这个非零解 $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2, \cdots$, $\tilde{c}_n$ 构成向量函数 $\boldsymbol{x}(t)$:

$$\boldsymbol{x}(t)\equiv\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t) \tag{5.18}$$

根据定理 2, 易知$\boldsymbol{x}(t)$是(5.15)的解. 注意到(5.17), 知道这个解 $\boldsymbol{x}(t)$满足初始条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{0} \tag{5.19}$$

但是，在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上恒等于零的向量函数 $\boldsymbol{0}$ 也是(5.15)的满足初始条件(5.19)的解. 由解的唯一性，知道 $\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{0}$, 即

$$\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t)\equiv\boldsymbol{0},\ a\leqslant t\leqslant b$$

因为 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$ 不全为零，这就与 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$线性无关的假设矛盾. 定理得证.

由定理 3、定理 4 可以知道，由（5.15）的 n 个解 $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$作成的伏朗斯基行列式 $W(t)$，或者恒等于零，或者恒不等于零.

定理 5 (5.15)一定存在 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots$, $\boldsymbol{x}_n(t)$.

证明 任取 $t_0 \in [a, b]$，根据解的存在唯一性定理，(5.15)分别满足初始条件

$$\boldsymbol{x}_1(t_0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2(t_0)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{x}_n(t_0)=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

的解 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$一定存在. 又因为这 n 个解 $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$的伏朗斯基行列式 $W(t_0)=1\neq 0$, 故根据定理 3, $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$是线性无关的. 定理证毕.

定理 6 如果 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$是(5.15)的 n 个线性无关的解，则(5.15)的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$均可表为

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$$

这里 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是相应的确定常数.

证明 任取 $t_0 \in [a, b]$，令

$$\boldsymbol{x}(t_0)=c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t_0) \qquad (5.20)$$

把(5.20)看作是以 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为未知量的线性代数方程组. 这方程组的系数行列式就是 $W(t_0)$. 因为 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$是线性无关的，根据定理 4 知道 $W(t_0)\neq 0$. 由线性代数方程组的理论，方程组(5.20)有唯一解 $c_1, c_2, \cdots, c_n$. 以这组确定了的 c_1,

$c_2, \cdots, c_n$ 构成向量函数 $c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$，那么，根据叠加原理，它是(5.15)的解．注意到(5.20)，可知(5.15)的两个解 $\boldsymbol{x}(t)$ 及 $c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$ 具有相同的初始条件．由解的唯一性，得到

$$\boldsymbol{x}(t)\equiv c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$$

定理证毕．

推论 1　(5.15)的线性无关解的最大个数等于 n．

我们称(5.15)的 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{x}_1(t)$，$\boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 为(5.15)的**一个基本解组**．显然，(5.15)具有无穷多个不同的基本解组．

由定理 5 和定理 6，我们知道 (5.15) 的解空间的维数是 n，这样就回答了前面提出的问题．本段的主要结果可以用线性代数的语言简单地表述为：(5.15) 所有解的集合构成一个 n 维线性空间．

注意到 5.1.1 关于 n 阶线性微分方程的初值问题 (5.6) 与线性微分方程组的初值问题(5.7)的等价性的论述，本节的所有定理都可以平行地推论到 n 阶线性微分方程上去．

从本节的定理 2 容易推得第四章的定理 2．参看 4.1.2 中关于纯量函数组的线性相关概念，我们可以证明：一组 $n-1$ 次可微的纯量函数 $x_1(t)$，$x_2(t), \cdots$，$x_m(t)$ 线性相关的充要条件是向量函数

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_2^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots \quad \begin{bmatrix} x_m(t) \\ x_m'(t) \\ \vdots \\ x_m^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \qquad (*)$$

线性相关．事实上，如果 $x_1(t), x_2(t)\cdots, x_m(t)$ 线性相关，则存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 使得

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_mx_m(t)=0$$

将上式对 t 微分一次，二次，…，$n-1$ 次，得到

$$c_1x_1'(t)+c_2x_2'(t)+\cdots+c_mx_m'(t)=0$$

$$c_1x_1''(t)+c_2x_2''(t)+\cdots+c_mx_m''(t)=0$$

$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

$$c_1x_1^{(n-1)}(t)+c_2x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_mx_m^{(n-1)}(t)=0$$

即有

$$c_1\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_1'(t)\\\vdots\\x_1^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}x_2(t)\\x_2'(t)\\\vdots\\x_2^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}+\cdots+c_m\begin{bmatrix}x_m(t)\\x_m'(t)\\\vdots\\x_m^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}=\mathbf{0}\quad(**)$$

这就是说，向量函数组(*)是线性相关的. 反之，如果向量函数(*)线性相关，则存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 使得(**)成立，当然有 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_mx_m(t)=0$，这就表明 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$ 线性相关.

这样一来，再参看 4.1.2 中关于纯量函数伏朗斯基行列式的概念，从本节的定理 3、定理 4 和定理 5 立即分别推得第四章的定理 3、定理 4 和定理 5.

从本节的定理 6 直接得到

推论 2 如果 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是 n 阶微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \tag{5.21}$$

的 n 个线性无关解，其中 $a_1(t), \cdots, a_n(t)$ 是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数，则(5.21)的任一解 $x(t)$ 均可表为

$$x(t)\equiv c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

这里 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是相应的确定常数.

如果 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是(5.21)的 n 个线性无关解(依 4.1.2 的有关定义，它们构成方程的基本解组)，根据 n 阶微分方

程通解的概念及 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]\neq 0$, 函数

$$x(t)\equiv c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

就是(5.21)的通解，其中 c_1, $c_2, \cdots, c_n$ 是任意常数. 从推论 2 知道，它包括了(5.21)的所有解. 推论 2 可以看成是第四章定理 6 的另一种表述形式.

现在，我们将本节的定理写成矩阵的形式. 这种不同的表述方法今后会有用的. 如果一个 $n\times n$ 矩阵的每一列都是 (5.15) 的解，我们称这个矩阵为(5.15)的**解矩阵**. 它的列在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是线性无关的解矩阵称为在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上(5.15)的**基解矩阵**. 我们用 $\boldsymbol{\Phi}(t)$表示由(5.15)的 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{\varphi}_1(t), \boldsymbol{\varphi}_2(t), \cdots, \boldsymbol{\varphi}_n(t)$ 作为列构成的基解矩阵. 定理 5 和定理 6 即可以表述为如下的定理 1*.

定理 1* (5.15)一定存在一个基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$. 如果 $\boldsymbol{\psi}(t)$是(5.15)的任一解, 那末

$$\boldsymbol{\psi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c} \tag{5.22}$$

这里 $\boldsymbol{c}$ 是确定的 n 维常数列向量.

从上面的讨论中, 我们可以看到，为了寻求(5.15)的任一解，需要寻求一个基解矩阵. 这样, 自然会提出下面的问题: 如果在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上找到(5.15)的一个解矩阵，能否以某种简单的方式验证这个解矩阵是不是基解矩阵呢? 定理 3 和定理 4 完全回答了这个问题, 它可以表述为下面的形式:

定理 2* (5.15)的一个解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是基解矩阵的充要条件是 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)\neq 0(a\leqslant t\leqslant b)$. 而且, 如果对某一个 $t_0\in[a, b]$, $\det\boldsymbol{\Phi}(t_0)\neq 0$, 则 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)\neq 0$, $a\leqslant t\leqslant b$. ($\det\boldsymbol{\Phi}(t)$表示矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$的行列式).

要注意, 行列式恒等于零的矩阵的列向量未必是线性相关的. 例如, 矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的行列式于任何区间上恒等于零，但它的列向量却是线性无关的。由定理 2* 即知，这个矩阵不可能是任一个齐线性微分方程组的解矩阵。

例 1 验证

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x},\text{ 其中 }\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

的基解矩阵。

解 首先，我们证明 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是解矩阵。令 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$表示 $\boldsymbol{\Phi}(t)$的第一列，这时

$$\boldsymbol{\varphi}_1'(t)=\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1(t)$$

这表示 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$是一个解。同样，如果以$\boldsymbol{\varphi}_2(t)$表示 $\boldsymbol{\Phi}(t)$的第二列，我们有

$$\boldsymbol{\varphi}_2'(t)=\begin{bmatrix} (t+1)e^t \\ e^t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} te^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_2(t)$$

这表示 $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$ 也是一个解。因此，$\boldsymbol{\Phi}(t)=[\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t)]$ 是解矩阵。

其次，根据定理 2*，因为 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{2t}\neq 0$，所以 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是基解矩阵.

从定理 1* 和定理 2* 可以得到下面的推论.

推论 1* 如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是 (5.15) 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的基解矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是非奇异 $n\times n$ 常数矩阵，那末，$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$ 也是(5.15)在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的基解矩阵.

证明 首先，根据解矩阵的定义易知，方程(5.15)的任一解矩阵 $\boldsymbol{X}(t)$ 必满足关系

$$\boldsymbol{X}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t) \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

反之亦然. 现令

$$\boldsymbol{\Psi}(t)\equiv\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C} \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

微分上式，并注意到 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程的基解矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为常数矩阵，得到

$$\boldsymbol{\Psi}'(t)\equiv\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{C}\equiv\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}\equiv\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)$$

即 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 是 (5.15)的解矩阵. 又由 $\boldsymbol{C}$ 的非奇异性，我们有

$$\det\boldsymbol{\Psi}(t)=\det\boldsymbol{\Phi}(t)\cdot\det\boldsymbol{C}\neq 0 \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

因此由定理 2* 知，$\boldsymbol{\Psi}(t)$ 即 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$ 是(5.15)的基解矩阵.

推论 2* 如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$，$\boldsymbol{\Psi}(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$的两个基解矩阵，那末，存在一个非奇异$n\times n$常数矩阵$\boldsymbol{C}$，使得在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上 $\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$.

证明 因为 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为基解矩阵，故其逆矩阵 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 一定存在. 现令

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)\equiv\boldsymbol{X}(t) \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

或

$$\boldsymbol{\Psi}(t)\equiv\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}(t) \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

易知 $\boldsymbol{X}(t)$ 是 $n\times n$ 可微矩阵，且

$$\det\boldsymbol{X}(t)\neq 0 \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

于是

$$\begin{aligned}A(t)\Psi(t)&\equiv\Psi'(t)\equiv\Phi'(t)X(t)+\Phi(t)X'(t)\\&\equiv A(t)\Phi(t)X(t)+\Phi(t)X'(t)\\&\equiv A(t)\Psi(t)+\Phi(t)X'(t)\quad(a\leqslant t\leqslant b)\end{aligned}$$

由此推知 $\Phi(t)X'(t)\equiv 0$, 或 $X'(t)\equiv 0(a\leqslant t\leqslant b)$, 即 $X(t)$为常数矩阵, 记为 C. 因此我们有

$$\Psi(t)=\Phi(t)C\quad(a\leqslant t\leqslant b)$$

其中 $C=\Phi^{-1}(a)\Psi(a)$为非奇异的 $n\times n$ 常数矩阵. 推论 2* 得证.

5.2.2 非齐线性微分方程组

本段讨论非齐线性微分方程组

$$x'=A(t)x+f(t)\tag{5.14}$$

的解的结构问题, 这里 $A(t)$是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的已知 $n\times n$ 连续矩阵, $f(t)$是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的已知 n 维连续列向量. 向量 $f(t)$通常称为强迫项, 因为如果(5.14)描述一个力学系统, $f(t)$就代表外力.

我们容易验证(5.14)的两个简单性质:

性质 1 如果 $\varphi(t)$是(5.14)的解, $\psi(t)$ 是(5.14)对应的齐线性方程组(5.15)的解. 则 $\varphi(t)+\psi(t)$是(5.14)的解.

性质 2 如果 $\tilde{\varphi}(t)$ 和 $\bar{\varphi}(t)$是(5.14) 的两个解, 则 $\tilde{\varphi}(t)-\bar{\varphi}(t)$是(5.15)的解.

下面的定理 7 给出(5.14)的解的结构.

定理 7 设 $\Phi(t)$是(5.15)的基解矩阵, $\bar{\varphi}(t)$是(5.14)的某一解, 则(5.14)的任一解 $\varphi(t)$都可表为

$$\varphi(t)=\Phi(t)c+\bar{\varphi}(t)\tag{5.23}$$

这里 c 是确定的常数列向量.

证明 由性质 2 我们知道 $\varphi(t)-\bar{\varphi}(t)$是(5.15) 的解. 再由 5.2.1 的定理 1*, 得到

$$\varphi(t)-\bar{\varphi}(t)=\Phi(t)c$$

这里 c 是确定的常数列向量, 由此即得

$$\varphi(t)=\Phi(t)c+\bar{\varphi}(t)$$

定理证毕.

定理 7 告诉我们, 为了寻求(5.14)的任一解, 只要知道(5.14)的一个解和它对应的齐线性方程组(5.15)的基解矩阵. 现在, 我们还要进一步指出, 在已经知道(5.15)的基解矩阵 $\Phi(t)$ 的情况下, 有一个寻求(5.14) 的解 $\varphi(t)$ 的简单的方法. 这个方法就是**常数变易法**.

从上一节我们知道, 如果 c 是常数列向量, 则 $\varphi(t)=\Phi(t)c$ 是(5.15)的解, 它不可能是(5.14)的解. 因此, 我们将 c 变易为 t 的向量函数, 而试图寻求 (5.14) 的形如

$$\varphi(t)=\Phi(t)c(t) \tag{5.24}$$

的解. 这里 $c(t)$ 是待定的向量函数.

假设 (5.14) 存在形如(5.24)的解. 这时, 将 (5.24) 代入 (5.14)得到

$$\Phi'(t)c(t)+\Phi(t)c'(t)=A(t)\Phi(t)c(t)+f(t)$$

因为 $\Phi(t)$是(5.15)的基解矩阵, 所以 $\Phi'(t)=A(t)\Phi(t)$, 由此上式中含有 $A(t)\Phi(t)c(t)$ 的项消去了. 因而 $c(t)$ 必须满足关系式

$$\Phi(t)c'(t)=f(t) \tag{5.25}$$

因为在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上 $\Phi(t)$ 是非奇异的, 所以 $\Phi^{-1}(t)$存在. 用 $\Phi^{-1}(t)$ 左乘(5.25)两边, 然后积分之, 得到

$$c(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds,\ t_0,\ \ t\in[a,b]$$

其中 $c(t_0)=0$. 这样，(5.24)变为

$$\varphi(t)=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds \quad t_0, t\in[a, b] \tag{5.26}$$

因此，如果(5.14)有一个形如(5.24)的解 $\varphi(t)$，则 $\varphi(t)$ 由公式(5.26)决定.

反之，用公式(5.26)决定的向量函数 $\varphi(t)$必定是(5.14)的解. 事实上，微分(5.26)得到

$$\varphi'(t)=\Phi'(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds+\Phi(t)\Phi^{-1}(t)f(t)$$

$$=A(t)\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds+f(t)$$

再利用公式(5.26)，即得

$$\varphi'(t)=A(t)\varphi(t)+f(t)$$

显然，还有 $\varphi(t_0)=0$，这样一来，我们就得到了下面的定理 8.

定理 8 如果 $\Phi(t)$ 是(5.15)的基解矩阵，则向量函数

$$\varphi(t)=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

是(5.14)的解，且满足初始条件

$$\varphi(t_0)=0$$

由定理 7 和定理 8 容易看出，(5.14)的满足初始条件

$$\varphi(t_0)=\eta$$

的解 $\varphi(t)$由下面公式给出

$$\varphi(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\eta+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds \tag{5.27}$$

这里 $\varphi_h(t)\equiv\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\eta$ 是(5.15)的满足初始条件

$$\varphi_h(t_0)=\eta$$

的解. 公式(5.26)或公式(5.27)称为非齐线性微分方程组(5.14)的**常数变易公式**.

例 2 试求初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}e^{-t}\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

的解.

解 在例 1 中我们已经知道

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{bmatrix}$$

是对应的齐线性方程组的基解矩阵. 取矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的逆, 我们得到

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\frac{\begin{bmatrix}e^s & -se^s\\ 0 & e^s\end{bmatrix}}{e^{2s}}=\begin{bmatrix}1 & -s\\ 0 & 1\end{bmatrix}e^{-s}$$

这样, 由定理 8, 满足初始条件

$$\boldsymbol{\psi}(0)=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

的解就是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}(t)&=\begin{bmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{bmatrix}\int_0^t e^{-s}\begin{bmatrix}1 & -s\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-s}\\ 0\end{bmatrix}ds\\ &=\begin{bmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{bmatrix}\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-2s}\\ 0\end{bmatrix}ds\\ &=\begin{bmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$, 对应的齐线性方程组满足初始条件

$$\boldsymbol{\varphi}_h(0)=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

的解就是

$$\boldsymbol{\varphi}_h(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(t-1)e^t\\ e^t\end{bmatrix}$$

由公式(5.27)，所求解就是

$$\varphi(t)=\varphi_h(t)+\psi(t)=\begin{bmatrix}(t-1)e^t\\ e^t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}te^t-\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\\ e^t\end{bmatrix}$$

注意到5.1.1关于n阶线性微分方程的初值问题(5.6)与线性微分方程组的初值问题(5.7)等价性的论述，我们可以得到关于n阶非齐线性微分方程的常数变易公式.

推论3 如果$a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t), f(t)$是区间$a\leqslant t\leqslant b$上的连续函数，$x_1(t)$, $x_2(t)$, $\cdots$, $x_n(t)$是区间$a\leqslant t\leqslant b$上齐线性方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (5.21)$$

的基本解组，那末，非齐线性方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \qquad (5.28)$$

的满足初始条件

$$\varphi(t_0)=0,\quad \varphi'(t_0)=0,\cdots,\quad \varphi^{(n-1)}(t_0)=0 \quad t_0\in[a,b]$$

的解由下面公式给出

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{W_k[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]}{W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]}\right\}f(s)ds \qquad (5.29)$$

这里$W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]$是$x_1(s),x_2(s), \cdots, x_n(s)$的伏朗斯基行列式，$W_k[x_1(s), x_2(s), \cdots, x_n(s)]$是在$W[x_1(s), x_2(s),\cdots,x_n(s)]$中的第$k$列代以$(0,0,\cdots,0, 1)^T$①后得到的行列

① $(0,0,\cdots,0,1)^T$表示$(0,0,\cdots,0,1)$的转置

$$\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

式，而且(5.28)的任一解 $u(t)$ 都具有形式

$$u(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\varphi(t) \tag{5.30}$$

这里 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是适当选取的常数.

公式(5.29)称为(5.28)的**常数变易公式.**

我们指出，这时方程(5.28)的通解可以表为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\varphi(t)$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是任意常数．并且由推论 3 知道，它包括了方程(5.28)的所有解．这就是第四章定理 7 的结论.

当 $n=2$ 时，公式(5.29)就是

$$\varphi(t)=x_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_1[x_1(s), x_2(s)]}{W[x_1(s), x_2(s)]}f(s)ds$$
$$+x_2(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_2[x_1(s), x_2(s)]}{W[x_1(s), x_2(s)]}f(s)ds$$

但是

$$W_1[x_1(s), x_2(s)]=\begin{vmatrix}0 & x_2(s)\\ 1 & x_2'(s)\end{vmatrix}=-x_2(s)$$

$$W_2[x_1(s), x_2(s)]=\begin{vmatrix}x_1(s) & 0\\ x_1'(s) & 1\end{vmatrix}=x_1(s)$$

因此，当 $n=2$ 时，常数变易公式变为

$$\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{x_2(t)x_1(s)-x_1(t)x_2(s)}{W[x_1(s), x_2(s)]}f(s)ds \tag{5.31}$$

而通解就是

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\varphi(t) \tag{5.32}$$

这里 c_1, c_2 是任意常数.

例 3　试求方程

$$x''+x=\operatorname{tg}t$$

的一个解.

解　易知对应的齐线性方程 $x''+x=0$ 的基本解组为 $x_1(t)$

$=\cos t, x_2(t)=\sin t$. 我们直接利用公式(5.31)来求方程的一个解. 这时

$$W[x_1(t), x_2(t)]=\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \equiv 1$$

由公式(5.31)即得(取 $t_0=0$)

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t (\sin t \cos s - \cos t \sin s) \operatorname{tg} s ds \\ &= \sin t \int_0^t \sin s ds - \cos t \int_0^t \sin s \operatorname{tg} s ds \\ &= \sin t(1-\cos t) + \cos t(\sin t - \ln|\sec t + \operatorname{tg} t|) \\ &= \sin t - \cos t \ln|\sec t + \operatorname{tg} t| \end{aligned}$$

注意, 因为 $\sin t$ 是对应的齐线性方程的一个解. 所以函数

$$\bar{\varphi}(t) = -\cos t \ln|\sec t + \operatorname{tg} t|$$

也是原方程的一个解.

习 题 5.2

1. 试验证

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{bmatrix}$$

是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{2}{t^2} & \dfrac{2}{t} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

在任何不包含原点的区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的基解矩阵.

2. 考虑方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \qquad (5.15)$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$ 是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 矩阵, 它的元素为 $a_{ij}(t)$, $i, j=1, 2, \cdots, n$.

a) 如果 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 是(5.15)的任意 n 个解, 那末它们的伏

朗斯基行列式 $W[\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)] \equiv W(t)$ 满足下面的一阶线性微分方程

$$W' = [a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t)]W$$

(提示: 利用行列式的微分公式, 求出 W' 的表达式)

b. 解上面的一阶线性微分方程, 证明下面的公式:

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} [a_{11}(s) + a_{22}(s) + \cdots + a_{nn}(s)] ds}, \quad t_0, t \in [a, b]$$

3. 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 为区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的连续 $n \times n$ 实矩阵, $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵, 而 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 为其一解. 试证:

a) 对于方程 $\boldsymbol{y}' = -\boldsymbol{A}^T(t)\boldsymbol{y}$ 的任一解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\psi}(t)$ 必有 $\boldsymbol{\psi}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(t) =$ 常数;

b) $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{y}' = -\boldsymbol{A}^T(t)\boldsymbol{y}$ 的基解矩阵的充要条件是存在非奇异的常数矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{\Psi}^T(t)\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{C}$.

4. 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{A}$ 为 $n \times n$ 常数矩阵) 的标准基解矩阵(即 $\boldsymbol{\Phi}(0) = \boldsymbol{E}$), 证明

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)$$

其中 t_0 为某一值.

5. 设 $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{f}(t)$ 分别为在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上连续的 $n \times n$ 矩阵和 n 维列向量, 证明方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$$

存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

6. 试证非齐线性微分方程组的叠加原理:

设 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t)$ 分别是方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_1(t)$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_2(t)$$

的解, 则 $\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{x}_2(t)$ 是方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_1(t) + \boldsymbol{f}_2(t)$$

的解.

7. 考虑方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

a) 试验证

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵；

b）试求 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的满足初始条件

$$\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$.

8. 试求 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

满足初始条件

$$\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$.

9. 试求下列方程的通解：

a）$x''+x=\sec t$，$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$

b）$x'''-8x=e^{2t}$

c）$x''-6x'+9x=e^t$

10. 给定方程

$$x''+8x'+7x=f(t)$$

其中 $f(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上连续，试利用常数变易公式，证明：

a）如果 $f(t)$ 在 $0\leqslant t<\infty$ 上有界，则上面方程的每一个解在 $0\leqslant t<\infty$ 上有界；

b）如果当 $t\to\infty$ 时，$f(t)\to 0$，则上面方程的每一个解 $\varphi(t)$，满足 $\varphi(t)\to 0$（当 $t\to\infty$ 时）.

11. 给定方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \tag{5.15}$$

这里 $\boldsymbol{A}(t)$ 是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 矩阵. 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(5.15)的一个基解矩阵，n 维向量函数 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$，$\|\boldsymbol{x}\|<\infty$ 上连续，$t_0\in[a,b]$. 试证明初值问题：

$$\begin{cases} x' = A(t)x + F(t, x) \\ \varphi(t_0) = \eta \end{cases} \tag{*}$$

的唯一解 $\varphi(t)$ 是积分方程组

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\eta + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)F(s, x(s))ds \tag{**}$$

的连续解. 反之, (**)的连续解也是初值问题(*)的解.

§5.3 常系数线性微分方程组

本节研究常系数线性微分方程组的问题，主要讨论齐线性微分方程组

$$x' = Ax \tag{5.33}$$

的基解矩阵的结构，这里 A 是 $n \times n$ 常数矩阵. 我们将通过代数的方法，寻求(5.33)的一个基解矩阵. 最后讨论拉普拉斯变换在常系数线性微分方程组中的应用.

5.3.1 矩阵指数 $\exp A$ 的定义和性质

为了寻求 (5.33) 的一个基解矩阵, 需要定义矩阵指数 $\exp A$ (或写作 e^A)，这要利用 5.1.2 中关于矩阵序列的有关定义和结果.

如果 A 是一个 $n \times n$ 常数矩阵，我们定义矩阵指数 $\exp A$ 为下面的矩阵级数的和

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots \tag{5.34}$$

其中 E 为 n 阶单位矩阵， A^m 是矩阵 A 的 m 次幂. 这里我们规定 $A^0 = E$，$0! = 1$. 这个级数对于所有的 A 都是收敛的，因而，$\exp A$ 是一个确定的矩阵.

事实上, 由 5.1.2 中的性质 $1°$, 易知对于一切正整数 k, 有

$$\left\|\frac{A^k}{k!}\right\|\leqslant\frac{\|A\|^k}{k!}$$

又因对于任一矩阵 A, $\|A\|$ 是一个确定的实数，所以数值级数

$$\|E\|+\|A\|+\frac{\|A\|^2}{2!}+\cdots+\frac{\|A\|^m}{m!}+\cdots$$

是收敛的(注意，它的和是 $n-1+e^{\|A\|}$)．由 5.1.2 知道，如果一个矩阵级数的每一项的范数都小于一个收敛的数值级数的对应项，则这个矩阵级数是收敛的，因而(5.34)对于一切矩阵 A 都是绝对收敛的．

应当进一步指出，级数

$$\exp At=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!} \tag{5.35}$$

在 t 的任何有限区间上是一致收敛的．事实上，对于一切正整数 k，当 $|t|\leqslant c$(c 是某一正常数)时，有

$$\left\|\frac{A^k t^k}{k!}\right\|\leqslant\frac{\|A\|^k|t|^k}{k!}\leqslant\frac{\|A\|^k c^k}{k!}$$

而数值级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(\|A\|c)^k}{k!}$ 是收敛的，因而(5.35)是一致收敛的．

矩阵指数 $\exp A$ 有如下性质:

1° 如果矩阵 A, B 是可交换的，即 $AB=BA$，则

$$\exp(A+B)=\exp A\exp B \tag{5.36}$$

事实上，由于矩阵级数(5.34)是绝对收敛的，因而关于绝对收敛数值级数运算的一些定理，如项的重新排列不改变级数的收敛性和级数的和以及级数的乘法定理等都同样地可以用到矩阵级数中来．由二项式定理及 $AB=BA$，得

$$\exp(A+B)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A+B)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k}\frac{A^l B^{k-l}}{l!(k-l)!}\right] \tag{5.37}$$

另一方面，由绝对收敛级数的乘法定理得

$$\exp A \exp B = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k} \frac{A^l}{l!} \frac{B^{k-l}}{(k-l)!}\right] \tag{5.38}$$

比较(5.37)和(5.38)，推得(5.36).

2° 对于任何矩阵 A，$(\exp A)^{-1}$ 存在，且

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A) \tag{5.39}$$

事实上，A 与 $-A$ 是可交换的，故在(5.36)中，令 $B=-A$，我们推得

$$\exp A \exp(-A) = \exp(A+(-A)) = \exp \mathbf{0} = E$$

由此即有

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$$

3° 如果 T 是非奇异矩阵，则

$$\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}(\exp A)T \tag{5.40}$$

事实上

$$\exp(T^{-1}AT) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(T^{-1}AT)^k}{k!}$$

$$= E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^{-1}A^kT}{k!}$$

$$= E + T^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)T = T^{-1}(\exp A)T$$

这就是我们所需要证明的.

现在我们可以着手回答有关常系数齐线性微分方程组(5.33)的基本课题了.

定理 9 矩阵

$$\Phi(t) = \exp At \tag{5.41}$$

是(5.33)的基解矩阵，且 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$.

证明 由定义易知 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$. 微分(5.41)，我们得到

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)=(\exp\boldsymbol{A}t)'=\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2t}{1!}+\frac{\boldsymbol{A}^3t^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^kt^{k-1}}{(k-1)!}+\cdots$$

$$=\boldsymbol{A}\exp\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)$$

这就表明，$\boldsymbol{\Phi}(t)$是(5.33)的解矩阵. 又因为 $\det\boldsymbol{\Phi}(0)=\det\boldsymbol{E}=1$，因此，$\boldsymbol{\Phi}(t)$是(5.33)的基解矩阵. 证毕.

由定理 9，我们可以利用这个基解矩阵推知 (5.33)的任一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$都具有形式

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=(\exp\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c} \tag{5.42}$$

这里 $\boldsymbol{c}$ 是一个常数向量.

在某些特殊情况下，我们容易得到(5.33) 的基解矩阵 $\exp\boldsymbol{A}t$ 的具体形式.

例 1 如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个对角形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}\text{(其中未写出的元素均为零)}$$

试找出 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵.

解 由(5.34)可得

$$\exp\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}\frac{t}{1!}+\begin{bmatrix} a_1^2 & & & \\ & a_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^2 \end{bmatrix}\frac{t^2}{2!}+\cdots$$

$$+\begin{bmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{bmatrix}\frac{t^k}{k!}+\cdots=\begin{bmatrix} e^{a_1t} & & & \\ & e^{a_2t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_nt} \end{bmatrix}$$

根据定理 9，这就是一个基解矩阵．当然，这个结果是很明显的，因为在现在的情况下，方程组可以写成 $x_k'=a_kx_k(k=1,2,\cdots,n)$，它可以分别进行积分．

例 2 试求 $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵．

解 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

而且后面的两个矩阵是可交换的，我们得到

$$\exp\boldsymbol{A}t=\exp\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}t\cdot\exp\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}t$$

$$=\begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}\left\{\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2\frac{t^2}{2!}+\cdots\right\}$$

但是，

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以，级数只有两项．因此，基解矩阵就是

$$\exp\boldsymbol{A}t=e^{2t}\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式

定理 9 告诉我们，(5.33)的基解矩阵就是矩阵 $\exp\boldsymbol{A}t$，问题似乎已经解决了．但是 $\exp\boldsymbol{A}t$ 是一个矩阵级数，这个矩阵的每一个元素是什么呢？事实上还没有具体给出，上面只就一些很特殊的情况，计算了 $\exp\boldsymbol{A}t$ 的元素．本段利用线性代数的基本知识，仔细地讨论 $\exp\boldsymbol{A}t$ 的计算方法，从而解决常系数线性微分方程组的基解矩阵的结构问题．

为了计算(5.33)的基解矩阵 $\exp\boldsymbol{A}t$，我们需要引进矩阵的特

征值和特征向量的概念.

类似于第四章的 4.2.2, 我们试图寻求

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5.33}$$

的形如

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0} \tag{5.43}$$

的解, 其中常数 λ 和向量 $\boldsymbol{c}$ 是待定的. 为此, 将 (5.43) 代入 (5.33), 得到

$$\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{c}$$

因为 $\mathrm{e}^{\lambda t}\neq0$, 上式变为

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0} \tag{5.44}$$

这就表示, $\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{c}$ 是(5.33)的解的充要条件就是常数 λ 和向量 $\boldsymbol{c}$ 满足方程(5.44). 方程(5.44)可以看作是向量 $\boldsymbol{c}$ 的 n 个分量的一个齐次线性代数方程组, 根据线性代数知识, 这个方程组具有非零解的充要条件就是 λ 满足方程

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$$

这就引出下面的定义:

假设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 常数矩阵, 使得关于 $\boldsymbol{u}$ 的线性代数方程组

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{5.45}$$

具有非零解的常数 λ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**特征值**. (5.45) 的对应于任一特征值 λ 的非零解 $\boldsymbol{u}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**对应于特征值 λ 的特征向量**.

n 次多项式

$$p(\lambda)\equiv\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**, n 次代数方程

$$p(\lambda)=0 \tag{5.46}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**. 也称它为(5.33)的特征方程.

这样一来, 根据上面的讨论, $\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{c}$ 是(5.33)的解, 当且仅当 λ

是 A 的特征值，且 c 是对应于 λ 的特征向量. A 的特征值就是特征方程(5.46)的根. 因为 n 次代数方程有 n 个根，所以 A 有 n 个特征值，当然不一定 n 个都互不相同. 如果 $\lambda=\lambda_0$ 是特征方程的单根，则称 λ_0 是**简单特征根**. 如果 $\lambda=\lambda_0$ 是特征方程的 k 重根(即 $p(\lambda)$ 具有因子 $(\lambda-\lambda_0)^k$，而没有因子 $(\lambda-\lambda_0)^{k+1}$)，则称 λ_0 是 **k 重特征根**.

例 3 试求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

的特征值和对应的特征向量.

解 A 的特征值就是特征方程

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+34=0$$

的根. 解之得到 $\lambda_{1,2}=3\pm5\mathrm{i}$. 对应于特征值 $\lambda_1=3+5\mathrm{i}$ 的特征向量

$$u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

必须满足线性代数方程组

$$(A-\lambda_1 E)u=\begin{bmatrix} -5\mathrm{i} & 5 \\ -5 & -5\mathrm{i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

因此，u_1, u_2 满足方程组

$$\begin{cases} -\mathrm{i}u_1+u_2=0 \\ -u_1-\mathrm{i}u_2=0 \end{cases}$$

所以，对于任意常数 $\alpha\neq0$

$$u=\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

是对应于 $\lambda_1=3+5\mathrm{i}$ 的特征向量. 类似地，可以求得对应于

$\lambda_2=3-5\mathrm{i}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{v}=\beta\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix}$$

其中 $\beta\neq0$ 是任意常数.

例 4 试求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&4\end{bmatrix}$$

的特征值和对应的特征向量.

解 特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\1&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+9=0$$

因此, $\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值. 为了寻求对应于 $\lambda=3$ 的特征向量,考虑方程组

$$(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

或者

$$\begin{cases}c_1-c_2=0\\c_1-c_2=0\end{cases}$$

因此,向量

$$\boldsymbol{c}=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

是对应于特征值 $\lambda=3$ 的特征向量,其中 $\alpha\neq0$ 是任意常数.

在例 3 中,特征向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是线性无关的,因为

$$\det[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]=\begin{vmatrix}\alpha&\beta\mathrm{i}\\\alpha\mathrm{i}&\beta\end{vmatrix}=2\alpha\beta\neq0$$

因而,向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 构成二维欧几里得空间的基底. 然而,在例 4 中, $\boldsymbol{A}$ 的特征向量只构成一个一维子空间. 在这里重要的是要知道,

一个给定的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于各个特征值的特征向量的集合是否构成一个基底. 根据线性代数的定理——任何 k 个不同特征值所对应的 k 个特征向量是线性无关的. 所以, 如果 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同的特征值, 那么对应的 n 个特征向量就构成 n 维欧几里得空间的一个基底.

我们提醒读者, 一个 $n\times n$ 矩阵最多有 n 个线性无关的特征向量. 当然, 在任何情况下, 最低限度有一个特征向量, 因为最低限度有一个特征值.

首先, 让我们讨论当 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量时(特别当 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同的特征值时, 就是这种情形), 微分方程组(5.33)的基解矩阵的计算方法.

我们可以证明下面的定理.

定理 10 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$, 它们对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$(不必各不相同), 那么矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=[\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n], -\infty<t<+\infty$$

是常系数线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5.33}$$

的一个基解矩阵.

证明 由上面关于特征值和特征向量的讨论知道, 每一个向量函数 $\mathrm{e}^{\lambda_j t}\boldsymbol{v}_j(j=1, 2, \cdots, n)$都是(5.33)的一个解. 因此, 矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=[\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n]$$

是(5.33)的一个解矩阵. 因为, 向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 是线性无关的, 所以

$$\det\boldsymbol{\Phi}(0)=\det[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]\neq 0$$

根据 5.2.1 的定理 2* 推得, $\boldsymbol{\Phi}(t)$是(5.33)的一个基解矩阵. 定理证毕.

例 5 试求方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ 其中\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}$$

的一个基解矩阵.

解 由例 3 知道, $\lambda_1=3+5\mathrm{i}$ 和 $\lambda_2=3-5\mathrm{i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 而

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\ 1\end{bmatrix}$$

是对应于 λ_1,λ_2 的两个线性无关的特征向量. 根据定理 10, 矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{(3+5\mathrm{i})t} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{(3-5\mathrm{i})t}\\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{(3+5\mathrm{i})t} & \mathrm{e}^{(3-5\mathrm{i})t}\end{bmatrix}$$

就是一个基解矩阵.

一般来说, 定理 10 中的 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 不一定就是 $\exp\boldsymbol{A}t$. 然而, 根据 5.2.1 的推论 2*, 我们可以确定它们之间的关系. 因为 $\exp\boldsymbol{A}t$ 和 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 都是(5.33)的基解矩阵, 所以存在一个非奇异的常数矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\exp\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}.$$

在上式中, 令 $t=0$, 我们得到 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$. 因此

$$\exp\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0) \tag{5.47}$$

根据公式(5.47), $\exp\boldsymbol{A}t$ 的计算问题相当于方程组(5.33)的任一基解矩阵的计算问题. 注意, 公式(5.47)还有一个用途, 这就是下面的附注所指出的.

附注 1 我们知道, 如果 $\boldsymbol{A}$ 是实的, 那么 $\exp\boldsymbol{A}t$ 也是实的. 因此, 当 $\boldsymbol{A}$ 是实时, 公式(5.47)给出一个构造实的基解矩阵的方法.

例 6 试求例 5 的实基解矩阵(或计算 $\exp\boldsymbol{A}t$).

解 根据(5.47)及附注 1, 从例 5 中得

$$\exp At=\begin{bmatrix}e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t}\\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t}\\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{(3+5i)t}+e^{(3-5i)t} & -i(e^{(3+5i)t}-e^{(3-5i)t})\\ i(e^{(3+5i)t}-e^{(3-5i)t}) & e^{(3+5i)t}+e^{(3-5i)t}\end{bmatrix}$$

$$=e^{3t}\begin{bmatrix}\cos 5t & \sin 5t\\ -\sin 5t & \cos 5t\end{bmatrix}$$

现在讨论当 A 是任意的 $n\times n$ 矩阵时，(5.33)的基解矩阵的计算方法. 先引进一些有关的线性代数知识①.

假设 A 是一个 $n\times n$矩阵，λ_1, λ_2, …, λ_k 是 A 的不同的特征值，它们的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$，这里 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$. 那末对应于每一个 n_j 重特征值 λ_j，线性代数方程组

$$(A-\lambda_j E)^{n_j}u=0 \tag{5.48}$$

的解的全体构成 n 维欧几里得空间的一个 n_j 维子空间 $U_j(j=1, 2, \cdots, k)$，并且 n 维欧几里得空间可表为 $U_1, U_2, \cdots, U_k$ 的直接和.

这就是说，对于 n 维欧几里得空间的每一个向量 u，存在唯一的向量 $u_1, u_2, \cdots u_k$，其中 $u_j\in U_j(j=1, 2, \cdots, k)$，使得

$$u=u_1+u_2+\cdots+u_k \tag{5.49}$$

关于分解式(5.49)，我们举出它的两个特殊情形. 如果 A 的所有特征值各不相同，这就是说，如果每一个 $n_j=1(j=1, 2, \cdots, k)$，而 $k=n$. 那么，对于任一向量 u，分解式(5.49)中的 u_j 可以表为 $u_j=c_j v_j$，其中 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是 A 的一组线性无关的特征向量，$c_j(j=1, 2, \cdots, n)$是某些常数. 如果 A 只有一个特征值，即 $k=1$，这时不必对 n 维欧几里得空间进行分解.

① 有关证明可参看谢邦杰编《线性代数》(1978 年，人民教育出版社).

现在利用刚刚引述过的线性代数知识着手寻求(5.33)的基解矩阵. 我们先从寻求任一满足初始条件 $\varphi(0)=\eta$ 的解 $\varphi(t)$ 开始. 从定理 9 我们知道, $\varphi(t)$ 可以表为 $\varphi(t)=(\exp\boldsymbol{A}t)\eta$, 而我们的目标就是要将 $(\exp\boldsymbol{A}t)\eta$ 明显地计算出来, 即要确切知道 $\varphi(t)$ 的每一个分量. 根据 $\exp\boldsymbol{A}t$ 的定义, 一般来说, $(\exp\boldsymbol{A}t)\eta$ 的分量是一个无穷级数, 因而难于计算. 这里的要点就是将初始向量 η 进行分解, 从而使得 $(\exp\boldsymbol{A}t)\eta$ 的分量可以表示为 t 的指数函数与 t 的幂函数乘积的有限项的线性组合.

假设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 重不同特征值. 这时由(5.49), 我们有

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots+\boldsymbol{v}_k \tag{5.50}$$

其中 $\boldsymbol{v}_j\in\boldsymbol{U}_j$, $j=1, 2, \cdots, k$, 因为子空间 $\boldsymbol{U}_j$ 是由方程组(5.48)产生的, $\boldsymbol{v}_j$ 一定是(5.48)的解. 由此即得

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^l\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{0},\ l\geqslant n_j,\ j=1, 2, \cdots, k \tag{5.51}$$

注意到当矩阵是对角形时, 由例 1 知道, $\exp\boldsymbol{A}t$ 是很容易求得的, 这时得到

$$e^{\lambda_j t}\exp(-\lambda_j\boldsymbol{E}t)=e^{\lambda_j t}\begin{bmatrix}e^{-\lambda_j t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-\lambda_j t}\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}$$

由此, 并根据等式(5.51), 即有

$$\begin{aligned}(\exp\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j&=(\exp\boldsymbol{A}t)e^{\lambda_j t}[\exp(-\lambda_j\boldsymbol{E}t)]\boldsymbol{v}_j\\&=e^{\lambda_j t}[\exp(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})t]\boldsymbol{v}_j\\&=e^{\lambda_j t}\Big[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})+\frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^2+\cdots\\&\quad+\frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j-1}\Big]\boldsymbol{v}_j\end{aligned}$$

再根据等式(5.50), 知微分方程组(5.33)的解 $\varphi(t)=(\exp\boldsymbol{A}t)\eta$ 可表为

$$\varphi(t)=(\exp At)\eta=(\exp At)\sum_{j=1}^{k}v_j=\sum_{j=1}^{k}(\exp At)v_j$$

$$=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\Big[E+t(A-\lambda_j E)+\frac{t^2}{2!}(A-\lambda_j E)^2+\cdots$$

$$+\frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}(A-\lambda_j E)^{n_j-1}\Big]v_j$$

所以，方程(5.33)满足 $\varphi(0)=\eta$ 的解 $\varphi(t)$ 最后可以写成

$$\varphi(t)=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(A-\lambda_j E)^i\right]v_j \qquad (5.52)$$

在特别情形，当 A 只有一个特征值时，无需将初始向量分解为(5.50)．这时对于任何 u，都有

$$(A-\lambda E)^n u=0$$

这就是说，$(A-\lambda E)^n$ 是一个零矩阵，这样一来，由 $\exp At$ 的定义，我们得到

$$\exp At=e^{\lambda t}\exp(A-\lambda E)t$$

$$=e^{\lambda t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}(A-\lambda E)^i \qquad (5.53)$$

为了要从(5.52)中得到 $\exp At$，只要注意到

$\exp At=(\exp At)E=[(\exp At)e_1,\ (\exp At)e_2,\ \cdots,\ (\exp At)e_n]$ 其中

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix},\quad e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,e_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

是单位向量．这就是说，依次令 $\eta=e_1,\eta=e_2,\cdots,\eta=e_n$，求得 n 个解，以这 n 个解作为列即可得到 $\exp At$.

例 7 如果$\boldsymbol{A}$是例 4 的矩阵，试解初值问题$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$，并求 $\exp \boldsymbol{A}t$.

解 从例 4 知道，$\lambda_1=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，这时 $n_1=2$；只有一个子空间 U_1，将 $n_1=2$ 及 $\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$代入(5.52)即得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}(t)&=\mathrm{e}^{3t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})]\boldsymbol{\eta}\\
&=\mathrm{e}^{3t}\left\{\boldsymbol{E}+t\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\\
&=\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}\eta_1+t(-\eta_1+\eta_2)\\ \eta_2+t(-\eta_1+\eta_2)\end{bmatrix} \qquad (5.54)
\end{aligned}
$$

利用公式(5.53)，即得

$$
\begin{aligned}
\exp \boldsymbol{A}t&=\mathrm{e}^{3t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})]\\
&=\mathrm{e}^{3t}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right\}\\
&=\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

或者，分别令

$$
\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}
$$

然后代入(5.54)，亦同样得到上面的结果

$$
\exp \boldsymbol{A}t=\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{bmatrix}
$$

例 8 如果

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}
$$

试求$\exp At$.

解 这里$n=5$，$\lambda=-4$是A的5重特征值，直接计算可得$(A+4E)^3=0$. 因此，由公式(5.53)可得

$$\exp At=e^{-4t}\left[E+t(A+4E)+\frac{t^2}{2!}(A+4E)^2\right]$$

这样一来

$$\exp At=e^{-4t}\left\{\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&1&\\&&&&1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\right\}$$

$$=e^{-4t}\begin{bmatrix}1&t&\frac{t^2}{2!}&0&0\\0&1&t&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

例9 考虑方程组

$$\begin{cases}x_1'=3x_1-x_2+x_3\\x_2'=2x_1+x_3\\x_3'=x_1-x_2+2x_3\end{cases}$$

这里系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$$

试求满足初始条件

$$\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{\eta}$$

的解 $\varphi(t)$, 并求 $\exp At$.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$$

$\lambda_1=1, \lambda_2=2$ 分别为 $n_1=1, n_2=2$ 重特征值. 为了确定三维欧几里得空间的子空间 U_1 和U_2, 根据(5.48), 我们需要考虑下面方程组:

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \qquad 和 \qquad (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$$

首先讨论

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$$

或

$$\begin{cases}2u_1-u_2+u_3=0\\ 2u_1-u_2+u_3=0\\ u_1-u_2+u_3=0\end{cases}$$

这个方程组的解为

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}0\\ \alpha\\ \alpha\end{bmatrix}$$

其中 α 为任意常数. 子空间 U_1 是由向量 $\boldsymbol{u}_1$ 所张成的. 其次讨论

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$$

或

$$\begin{cases}-u_1+u_2=0\\-u_1+u_2=0\end{cases}$$

这个方程组的解为

$$\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}\beta\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}$$

其中 β,γ 是任意常数. 子空间 U_2 是由向量 $\boldsymbol{u}_2$ 所张成的.

现在我们需要找出向量 $\boldsymbol{v}_1\in U_1$, $\boldsymbol{v}_2\in U_2$ 使得我们能够将初始向量 $\boldsymbol{\eta}$ 写成(5.50)的形式. 因为 $\boldsymbol{v}_1\in U_1$, $\boldsymbol{v}_2\in U_2$, 所以

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}0\\\alpha\\\alpha\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}\beta\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}$$

其中 α,β,γ 是某些常数, 这样一来

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\alpha\\\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}$$

因而 $\beta=\eta_1,\alpha+\beta=\eta_2,\alpha+\gamma=\eta_3$, 解之得到 $\alpha=\eta_2-\eta_1$, $\beta=\eta_1$, $\gamma=\eta_3-\eta_2+\eta_1$, 且

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}0\\\eta_2-\eta_1\\\eta_2-\eta_1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_1\\\eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix}$$

根据公式(5.52), 我们得到满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\mathrm{e}^{t}\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}_1+\mathrm{e}^{2t}(\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}))\boldsymbol{v}_2$$

$$=\mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix}0\\\eta_2-\eta_1\\\eta_2-\eta_1\end{bmatrix}+\mathrm{e}^{2t}\left(\boldsymbol{E}+t\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_1\\\eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix}$$

$$=e^{t}\begin{bmatrix}0\\ \eta_2-\eta_1\\ \eta_2-\eta_1\end{bmatrix}+e^{2t}\begin{bmatrix}1+t & -t & t\\ 2t & 1-2t & t\\ t & -t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_1\\ \eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix}$$

$$=e^{t}\begin{bmatrix}0\\ \eta_2-\eta_1\\ \eta_2-\eta_1\end{bmatrix}+e^{2t}\begin{bmatrix}\eta_1+t(\eta_3-\eta_2+\eta_1)\\ \eta_1+t(\eta_3-\eta_2+\eta_1)\\ \eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix}$$

为了得到 $\exp At$，依次令 η 等于

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

代入上式，我们得到三个线性无关的解．利用这三个解作为列，即得

$$\exp At=\begin{bmatrix}(1+t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t}\\ -e^{t}+(1+t)e^{2t} & e^{t}-te^{2t} & te^{2t}\\ -e^{t}+e^{2t} & e^{t}-e^{2t} & e^{2t}\end{bmatrix}$$

应该指出，公式(5.52)是本节的主要结果．公式(5.52)告诉我们，常系数线性微分方程组(5.33)的任一解都可以通过有限次代数运算求出来．在常微分方程的理论上和应用上，微分方程组的解当 $t\to\infty$ 时的性态的研究都是非常重要的．例如第六章将要讨论的微分方程组的解的稳定性就是其中的一个方面．作为公式(5.52)在这方面的一个直接应用，我们可以得到下面的定理 11．关于公式(5.52)的更深刻的应用，留待第六章去讨论．

定理 11 给定常系数线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5.33}$$

那么，1° 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的实部都是负的，则(5.33)的任一解当 $t\to+\infty$ 时都趋于零．

2° 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的实部都是非正的，且实部为零的特征

值都是简单特征值，则(5.33)的任一解当 $t\to+\infty$ 时都保持有界.

3° 如果 A 的特征值至少有一个具有正实部，则(5.33)至少有一个解当 $t\to+\infty$ 时趋于无穷.

证明 根据公式(5.52)，知道方程组(5.33)的任一解都可以表示为 t 的指数函数与 t 的幂函数乘积的线性组合，再根据指数函数的简单性质及定理中 1°, 2°两部分所作的假设，即可得 1°, 2°的证明. 为了证明 3°，设 $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是 A 的特征值，其中 α,β 是实数且 $\alpha>0$. 取 η 为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量，则向量函数

$$\varphi(t)=e^{\lambda t}\eta$$

是(5.33)的一个解，于是

$$\|\varphi(t)\|=e^{\alpha t}\|\eta\|\to+\infty(\text{当 } t\to+\infty \text{ 时})$$

这就是所要证明的.

本段所讨论的步骤及公式(5.52)提供了一个实际计算(5.33)的基解矩阵的方法. 在这里我们主要应用了有关空间分解的结论. 事实上，利用其他方面的代数知识也可以相应地得到计算基解矩阵 $\exp At$ 的别的方法. 例如通常微分方程教材所介绍的化约当(Jordan)标准型的方法就是其中的一种，它主要是利用矩阵理论中约当标准型方面的知识. 这一方法在理论上显得颇为简洁，但实际计算起来则可能比较麻烦. 又如 E. J. Putzer 利用哈密顿-凯莱(Hamiton-Cayley) 定理，将基解矩阵 $\exp At$ 的计算问题归结为求解带下三角矩阵的齐线性微分方程组的初值问题，方法也很简单. 现在将提及的方法介绍如下作为附注供读者参考.

附注 2 利用约当标准型计算基解矩阵.

首先对于矩阵 A，由矩阵理论知道，必存在非奇异的矩阵 T，使得

$$T^{-1}AT=J \tag{5.55}$$

其中 J 具有约当标准型，即

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l \end{bmatrix}$$

这里

$$J_j=\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & & \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{bmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,l)$$

为 n_j 阶矩阵，并且 $n_1+n_2+\cdots+n_l=n$，而 l 为矩阵 $A-\lambda E$ 的初级因子的个数；$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$ 是特征方程(5.46)的根，其间可能有相同者；矩阵中空白的元素均为零.

由于矩阵 J 及 $J_j(j=1,2,\cdots,l)$ 的特殊形式，利用定义(5.34)容易计算得到

$$\exp Jt=\begin{bmatrix} \exp J_1t & & & \\ & \exp J_2t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp J_lt \end{bmatrix} \tag{5.56}$$

其中

$$\exp J_jt=\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_jt} \tag{5.57}$$

所以，如果矩阵 J 是约当标准型，那么可以计算得到 $\exp Jt$，由 (5.55) 及矩阵指数的性质 3°，可以得到微分方程组(5.33) 的基解矩阵$\exp At$ 的计算公式:

$$\exp At=\exp(TJT^{-1})t=T(\exp Jt)T^{-1} \tag{5.58}$$

当然,根据 5.2.1 的推论 1*,矩阵

$$\psi(t)=T\exp Jt \tag{5.59}$$

也是(5.33)的基解矩阵. 由公式(5.58)或者(5.59)都可以得到基解矩阵的具体结构,问题是非奇异矩阵 T 的计算比较麻烦.

附注 3　计算基解矩阵 $\exp At$ 的另一方法.

用直接代入的方法应用哈密顿-凯莱定理容易验证①

$$\exp At=\sum_{j=0}^{n-1}r_{j+1}(t)P_j$$

其中 $P_0=E, P_j=\prod_{k=1}^{j}(A-\lambda_k E)$, $(j=1, 2, \cdots, n)$, 而$r_1(t)$, $r_2(t),\cdots,r_n(t)$是初值问题

$$\begin{cases}r_1'=\lambda_1 r_1\\ r_j'=r_{j-1}+\lambda_j r_j, \quad (j=2,3,\cdots,n)\\ r_1(0)=1, r_j(0)=0, \quad (j=2,3,\cdots,n)\end{cases}$$

的解, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值(不必相异).

现在应用这一方法计算例 9 给出的方程的基解矩阵 $\exp At$. 这时 $\lambda_1=1, \lambda_2=\lambda_3=2$, 求解初值问题:

$$\begin{cases}r_1'=r_1\\ r_2'=r_1+2r_2\\ r_3'=r_2+2r_3\\ r_1(0)=1, r_2(0)=r_3(0)=0\end{cases}$$

① 参阅 E. J. Putzer: Avoiding the Jordan Canonical form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients. 美国数学月刊, 1966. Vol. 73, No. 1.

得到 $r_1=e^t, r_2=e^{2t}-e^t, r_3=(t-1)e^{2t}+e^t$, 计算得

$$\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

最后得到

$$\begin{aligned}\exp \boldsymbol{A}t &= \sum_{j=0}^{2} r_{j+1}(t)\boldsymbol{P}_j\\ &=\begin{bmatrix}(1+t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t}\\ (1+t)e^{2t}-e^t & -te^{2t}+e^t & te^{2t}\\ e^{2t}-e^t & -e^{2t}+e^t & e^{2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

与例 9 所得结果相同.

最后，我们给出非齐线性方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{5.60}$$

的常数变易公式，这里 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 常数矩阵，$\boldsymbol{f}(t)$是已知的连续向量函数. 因为(5.60)对应的齐线性方程组（5.33）的基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp \boldsymbol{A}t$，所以，5.2.2 中的常数变易公式在形式上变得特别简单. 这时，我们有 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\exp(-s\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\exp[(t-s)\boldsymbol{A}]$，若初始条件是 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$, 则 $\boldsymbol{\varphi}_h(t)=\exp[(t-t_0)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{\eta}$, (5.60)的解就是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t)&=\exp[(t-t_0)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{\eta}\\ &\quad+\int_{t_0}^{t}\exp[(t-s)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f}(s)ds\end{aligned} \tag{5.61}$$

我们可以利用本段提供的方法具体构造基解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$. 然而，除非是某些特殊的情形，要去具体计算(5.61)中的积分式也是不容易的.

例 10 设

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}\qquad f(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}$$

试求方程 $x'=Ax+f(t)$满足初始条件

$$\varphi(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

的解.

解 由前面的例 6 知道,

$$\exp At=e^{3t}\begin{bmatrix}\cos 5t & \sin 5t\\ -\sin 5t & \cos 5t\end{bmatrix}$$

代入公式(5.61),我们得到(利用 $t_0=0$)

$$\varphi(t)=e^{3t}\begin{bmatrix}\cos 5t & \sin 5t\\ -\sin 5t & \cos 5t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$+\int_0^t e^{3(t-s)}\begin{bmatrix}\cos 5(t-s) & \sin 5(t-s)\\ -\sin 5(t-s) & \cos 5(t-s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-s}\\ 0\end{bmatrix}ds$$

我们计算上面的积分如下:

$$\varphi(t)=e^{3t}\begin{bmatrix}\sin 5t\\ \cos 5t\end{bmatrix}$$

$$+e^{3t}\int_0^t e^{-4s}\begin{bmatrix}\cos 5t\cos 5s+\sin 5t\sin 5s\\ -\sin 5t\cos 5s+\cos 5t\sin 5s\end{bmatrix}ds$$

利用公式或者分部积分法,得到

$$\int_0^t e^{-4s}\cos 5s ds=\frac{e^{-4s}}{16+25}(-4\cos 5s+5\sin 5s)\Bigg|_{s=0}^{s=t}$$

$$\int_0^t e^{-4s}\sin 5s ds=\frac{e^{-4s}}{16+25}(-4\sin 5s-5\cos 5s)\Bigg|_{s=0}^{s=t}$$

最后我们得到

$$\varphi(t)=\frac{1}{41}e^{3t}\begin{bmatrix}4\cos 5t+46\sin 5t-4e^{-4t}\\ 46\cos 5t-4\sin 5t-5e^{-4t}\end{bmatrix}$$

5.3.3 拉普拉斯变换的应用

拉普拉斯变换可以用于解常系数高阶线性微分方程，也可以用来解常系数线性微分方程组. 为此，首先将拉普拉斯变换推广到向量函数的情形. 我们定义

$$\mathscr{L}[\boldsymbol{f}(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\boldsymbol{f}(t)dt$$

这里 $\boldsymbol{f}(t)$是 n 维向量函数，要求它的每一个分量都存在拉普拉斯变换. 其次，我们来建立下面的定理 12，它保证了对常系数线性微分方程(组)施行拉普拉斯变换的可能性.

考虑常系数线性微分方程

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 常数矩阵，$\boldsymbol{f}(t)$为 $0\leqslant t<+\infty$ 上的连续 n 维向量函数(包括 $\boldsymbol{f}(t)\equiv\boldsymbol{0}$ 的情形).

定理 12 如果对向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$,存在常数 $M>0$ 及 $\sigma>0$ 使不等式

$$\|\boldsymbol{f}(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{\sigma t} \tag{5.62}$$

对所有充分大的 t 成立,则初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\eta}$$

的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 及其导数 $\boldsymbol{\varphi}'(t)$均像 $\boldsymbol{f}(t)$一样满足类似(5.62)的不等式,从而它们的拉普拉斯变换都存在.

证明 根据假设存在足够大的 T，使当 $t\geqslant T$ 时$\|\boldsymbol{f}(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{\sigma t}$,而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t)&\equiv\boldsymbol{\eta}+\int_0^t[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi}(s)+\boldsymbol{f}(s)]ds\\&\equiv\boldsymbol{\eta}+\int_0^T[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi}(s)+\boldsymbol{f}(s)]ds+\int_T^t[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi}(s)+\boldsymbol{f}(s)]ds,\end{aligned}$$

注意到在所假设条件下，解 $\boldsymbol{\varphi}(t)(\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta})$于 $0\leqslant t<+\infty$ 存在、

唯一且连续，故于$[0,T]$上 $A\varphi(t)+f(t)$有界，即存在 $K>0$ 使

$$\left\|\eta+\int_0^T[A\varphi(s)+f(s)]ds\right\|\leqslant K$$

于是

$$\|\varphi(t)\|\leqslant K+\frac{M}{\sigma}e^{\sigma t}+\int_T^t\|A\|\cdot\|\varphi(s)\|ds$$

两边乘以 $e^{-\sigma t}$，并注意到当 $t\geqslant s$ 时 $e^{-\sigma t}\leqslant e^{-\sigma s}$，得到

$$\|\varphi(t)\|e^{-\sigma t}\leqslant Ke^{-\sigma t}+\frac{M}{\sigma}+\int_T^t\|A\|\cdot\|\varphi(s)\|e^{-\sigma s}ds$$

令 $L=Ke^{-\sigma T}+\dfrac{M}{\sigma}$ 及 $r(t)=\|\varphi(t)\|e^{-\sigma t}$，则当 $t\geqslant T$ 时 $Ke^{-\sigma t}+\dfrac{M}{\sigma}\leqslant L$，$r(t)\geqslant 0$ 且

$$r(t)\leqslant L+\int_T^t\|A\|r(s)ds$$

由此根据格朗瓦耳不等式（见习题 3.1）即得

$$r(t)\leqslant L\exp[\|A\|(t-T)],\quad t\geqslant T$$

或

$$\|\varphi(t)\|\leqslant L\exp(-\|A\|T)\cdot\exp[(\|A\|+\sigma)t],\quad t\geqslant T$$

又计及 $\varphi'(t)\equiv A\varphi(t)+f(t)$，则当 $t\geqslant T$ 时就有

$$\begin{aligned}\|\varphi'(t)\|&\leqslant\|A\|\cdot\|\varphi(t)\|+\|f(t)\|\\&\leqslant\|A\|L\exp(-\|A\|T)\cdot\exp[(\|A\|+\sigma)t]+Me^{\sigma t}\\&\leqslant[\|A\|L\exp(-\|A\|T)+M]\exp[(\|A\|+\sigma)t]\end{aligned}$$

这就是说，对向量函数 $\varphi(t)$及 $\varphi'(t)$ 存在相应的常数 M 和 σ 使不等式(5.62)成立. 易见它们的每一个分量都是原函数，从而拉普拉斯变换存在. 因此，按定义向量函数 $f(t)$及 $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$的拉普拉斯变换均存在.

推论 如果对于数值函数 $f(t)$，存在常数 $M>0$ 及 $\sigma>0$ 使不等式

$$|f(t)|\leqslant Me^{\sigma t}$$

对所有充分大的 t 成立，则常系数线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases}x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=f(t)\\x(0)=x_0,\ x'(0)=x_0',\ \cdots,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}\end{cases}\tag{4.32}$$

的解及其直至 n 阶导数均存在拉普拉斯变换.

例 11 利用拉普拉斯变换求解例 10.

解 将方程组写成分量形式，即

$$\begin{cases}x_1'=3x_1+5x_2+e^{-t}\\x_2'=-5x_1+3x_2,\ \varphi_1(0)=0,\ \varphi_2(0)=1\end{cases}$$

令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)]$，$X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)]$，以 $x_1=\varphi_1(t)$、$x_2=\varphi_2(t)$代入方程组后，对方程组施行拉普拉斯变换(依定理 12，这是可能的)得到

$$\begin{cases}sX_1(s)=3X_1(s)+5X_2(s)+\dfrac{1}{s+1}\\sX_2(s)-1=-5X_1(s)+3X_2(s)\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(s-3)X_1(s)-5X_2(s)=\dfrac{1}{s+1}\\5X_1(s)+(s-3)X_2(s)=1\end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases}X_1(s)=\dfrac{\dfrac{s-3}{s+1}+5}{(s-3)^2+5^2}\\\qquad=\dfrac{1}{41}\left[4\dfrac{s-3}{(s-3)^2+5^2}+46\dfrac{5}{(s-3)^2+5^2}-4\dfrac{1}{s+1}\right]\\X_2(s)=\dfrac{s-3-\dfrac{5}{s+1}}{(s-3)^2+5^2}\\\qquad=\dfrac{1}{41}\left[46\dfrac{s-3}{(s-3)^2+5^2}-4\dfrac{5}{(s-3)^2+5^2}-5\dfrac{1}{s+1}\right]\end{cases}$$

取反变换或查拉普拉斯变换表即得

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{41}e^{3t}(4\cos 5t+46\sin 5t-4e^{-4t})$$

$$\varphi_2(t)=\frac{1}{41}e^{3t}(46\cos 5t-4\sin 5t-5e^{-4t})$$

所得结果跟例 10 一致.

例 12 试求方程组

$$\begin{cases}x_1'=2x_1+x_2\\ x_2'=-x_1+4x_2\end{cases}$$

满足初始条件 $\varphi_1(0)=0,\varphi_2(0)=1$ 的解$(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t))$. 并求出它的基解矩阵.

解 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)],X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)]$. 假设$x_1=\varphi_1(t),x_2=\varphi_2(t)$满足微分方程组，我们对方程取拉普拉斯变换，得到

$$\begin{cases}sX_1(s)-\varphi_1(0)=2X_1(s)+X_2(s)\\ sX_2(s)-\varphi_2(0)=-X_1(s)+4X_2(s)\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(s-2)X_1(s)-X_2(s)=\varphi_1(0)=0\\ X_1(s)+(s-4)X_2(s)=\varphi_2(0)=1\end{cases}$$

解出 $X_1(s),X_2(s)$, 得到

$$X_1(s)=\frac{1}{(s-3)^2},\quad X_2(s)=\frac{s-2}{(s-3)^2}=\frac{1}{s-3}+\frac{1}{(s-3)^2}$$

取反变换, 即得

$$\varphi_1(t)=te^{3t},\quad \varphi_2(t)=e^{3t}+te^{3t}=(1+t)e^{3t}$$

为了要寻求基解矩阵，再求满足初始条件 $\psi_1(0)=1,\psi_2(0)=0$ 的解$(\psi_1(t),\psi_2(t))$. 如前一样, 我们得到方程组

$$\begin{cases}(s-2)X_1(s)-X_2(s)=\psi_1(0)=1\\ X_1(s)+(s-4)X_2(s)=\psi_2(0)=0\end{cases}$$

的解为

$$X_1(s)=\frac{s-4}{(s-3)^2}=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{(s-3)^2},\ X_2(s)=\frac{-1}{(s-3)^2}$$

取反变换，得到

$$\psi_1(t)=(1-t)\mathrm{e}^{3t},\quad \psi_2(t)=-t\mathrm{e}^{3t}$$

这样一来，基解矩阵就是

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\psi_1(t) & \varphi_1(t)\\ \psi_2(t) & \varphi_2(t)\end{bmatrix}=\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{bmatrix}$$

读者可以将结果与前面的例 7 比较一下.

从上两例中我们可以看到，应用拉普拉斯变换可以将求解线性微分方程组的问题化为求解线性代数方程组的问题. 如果方程组的阶数不很高的话，那么它的解是容易求出来的.

应用拉普拉斯变换还可以直接去解高阶的常系数线性微分方程组，而不必先化为一阶的常系数线性微分方程组.

例 13 试求方程组

$$\begin{cases}x_1''-2x_1'-x_2'+2x_2=0\\ x_1'-2x_1+x_2'=-2\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$$

满足初始条件 $\varphi_1(0)=3$，$\varphi_1'(0)=2$，$\varphi_2(0)=0$ 的解 $(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$.

解 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)]$，$X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)]$、对方程组取拉普拉斯变换，我们得到

$$\begin{cases}[s^2X_1(s)-3s-2]-2[sX_1(s)-3]-sX_2(s)+2X_2(s)=0\\ [sX_1(s)-3]-2X_1(s)+sX_2(s)=\dfrac{-2}{s+1}\end{cases}$$

整理后得到

$$\begin{cases}(s^2-2s)X_1(s)-(s-2)X_2(s)=3s-4\\ (s-2)X_1(s)+sX_2(s)=\dfrac{3s+1}{s+1}\end{cases}$$

解上面方程组，即有

$$X_1(s)=\frac{3s^2-4s-1}{(s+1)(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-2}$$

$$X_2(s)=\frac{2}{(s+1)(s-1)}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}$$

再取反变换就得到解

$$\varphi_1(t)=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{2t},\quad \varphi_2(t)=\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}$$

从例 13 中可以看出，应用拉普拉斯变换可以比较快地得到解答.

拉普拉斯变换可以提供另一种寻求常系数线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5.33}$$

的基解矩阵的方法.

设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是(5.33)满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\eta$ 的解. 我们令 $\boldsymbol{X}(s)=\mathscr{L}[\boldsymbol{\varphi}(t)]$. 对(5.33)两边取拉普拉斯变换并利用初始条件，得到

$$s\boldsymbol{X}(s)-\eta=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)$$

因此

$$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\eta \tag{5.63}$$

方程组(5.63)是以 $\boldsymbol{X}(s)$的 n 个分量 $X_1(s), X_2(s), \cdots, X_n(s)$为未知量的 n 阶线性代数方程组. 显然，如果 s 不等于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，那么 $\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\neq 0$. 这时，根据克莱姆(Cramer)法则，从方程组(5.63)中可以唯一地解出 $\boldsymbol{X}(s)$. 因为 $\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 是 s 的 n 次多项式，所以 $\boldsymbol{X}(s)$的每一个分量都是 s 的有理函数，而且关于 η 的分量 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 都是线性的. 因此，$\boldsymbol{X}(s)$的每一个分量都可以展为部分分式(分母是$(s-\lambda_j)$的整数幂，这里 λ_j 是 $\boldsymbol{A}$的特征值). 这样一来，取 $\boldsymbol{X}(s)$ 的反变换就能求得对应于任何初始向量 η 的解 $\varphi(t)$. 依次令

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\eta}_n=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

就求得解 $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$. 以 $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$ 作为列向量就构成(5.33)的一个基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$, 且 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$.

例 14 试构造方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$$

解 对方程组两边取拉普拉斯变换, 得到

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)$$

即

$$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{\eta}$$

由 $\boldsymbol{A}$ 的具体元素代入, 得到方程组

$$\begin{bmatrix}s-3&1&-1\\-2&s&-1\\-1&1&s-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\\X_3(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{bmatrix}$$

按第一行将 $\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 展开, 得到

$$\begin{aligned}\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})&=(s-3)[s(s-2)+1]\\&\quad+[2(s-2)+1]-(-2+s)\\&=s^3-5s^2+8s-4=(s-1)(s-2)^2\end{aligned}$$

根据克莱姆法则, 有

$$X_1(s)=\frac{\begin{vmatrix}\eta_1&1&-1\\\eta_2&s&-1\\\eta_3&1&s-2\end{vmatrix}}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$=\frac{\eta_1[s(s-2)+1]-\eta_2(s-2+1)+\eta_3(-1+s)}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$=\frac{\eta_1(s-1)-\eta_2+\eta_3}{(s-2)^2}$$

$$X_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} s-3 & \eta_1 & -1 \\ -2 & \eta_2 & -1 \\ -1 & \eta_3 & s-2 \end{vmatrix}}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$=\frac{\eta_1(2s-3)+\eta_2(s^2-5s+5)+\eta_2(s-1)}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$X_3(s)=\frac{\begin{vmatrix} s-3 & 1 & \eta_1 \\ -2 & s & \eta_2 \\ -1 & 1 & \eta_3 \end{vmatrix}}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$=\frac{\eta_1(s-2)-\eta_2(s-2)+\eta_3(s^2-3s+2)}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$=\frac{\eta_1-\eta_2}{(s-1)(s-2)}+\frac{\eta_3}{s-2}$$

到此，最好先将 η_1,η_2,η_3 的具体数值代入，再取反变换比较方便些.

首先，令 $\eta_1=1,\eta_2=0,\eta_3=0$，我们得到

$$X_1(s)=\frac{s-1}{(s-2)^2}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{(s-2)^2}$$

从 $(s-1)=A(s-2)+B$ 得到 $A=1,B=1$. 因此

$$X_1(s)=\frac{1}{s-2}+\frac{1}{(s-2)^2}$$

$$x_1(t)=e^{2t}+te^{2t}=(1+t)e^{2t}$$

同时，又得

$$X_2(s)=\frac{2s-3}{(s-1)(s-2)^2}=\frac{C}{s-1}+\frac{D}{s-2}+\frac{F}{(s-2)^2},$$

从 $2s-3=C(s-2)^2+D(s-2)(s-1)+F(s-1)$ 得到 $C=-1, D=1, F=1$. 因此

$$X_2(s)=\frac{-1}{s-1}+\frac{1}{s-2}+\frac{1}{(s-2)^2}$$

$$x_2(t)=(t+1)e^{2t}-e^t$$

同样，可计算得到

$$X_3(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}$$

$$x_3(t)=e^{2t}-e^t$$

这样一来，

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t)=\begin{bmatrix}(1+t)e^{2t}\\(1+t)e^{2t}-e^t\\e^{2t}-e^t\end{bmatrix}$$

其次，令 $\eta_1=0, \eta_2=1, \eta_3=0$, 我们得到

$$X_1(s)=\frac{-1}{(s-2)^2}$$

$$x_1(t)=-te^{2t}$$

$$X_2(s)=\frac{s^2-5s+5}{(s-1)(s-2)^2}=\frac{A_1}{s-1}+\frac{B_1}{s-2}+\frac{C_1}{(s-2)^2}$$

从 $s^2-5s+5=A_1(s-2)^2+B_1(s-1)(s-2)+C_1(s-1)$ 得 $A_1=1$, $B_1=0, C_1=-1$. 因此

$$X_2(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{(s-2)^2}$$

$$x_2(t)=e^t-te^{2t}$$

又

$$X_3(s)=\frac{-1}{(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}$$

$$x_3(t)=e^t-e^{2t}$$

这样一来，

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t)=\begin{bmatrix} -te^{2t} \\ e^t-te^{2t} \\ e^t-e^{2t} \end{bmatrix}$$

最后,令 $\eta_1=0,\eta_2=0,\eta_3=1$,我们得到

$$X_1(s)=\frac{1}{(s-2)^2},\quad x_1(t)=te^{2t}$$

$$X_2(s)=\frac{1}{(s-2)^2},\quad x_2(t)=te^{2t}$$

$$X_3(s)=\frac{1}{s-2},\quad x_3(t)=e^{2t}$$

这样一来,

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t)=\begin{bmatrix} te^{2t} \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

综合上面的结果,我们得到基解矩阵

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t)&=[\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t),\boldsymbol{\varphi}_3(t)]\\&=\begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t} \\ (1+t)e^{2t}-e^t & e^t-te^{2t} & te^{2t} \\ e^{2t}-e^t & e^t-e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

且

$$\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$$

读者可将本例结果与前面的例 9 作一比较.

从上述各例可以看到,应用拉普拉斯变换求解常系数线性微分方程(组)的初值问题是比较快捷的.但遗憾的是,它对方程中强迫项的性质要求比较高.因此,并非任何常系数线性微分方程(组)都能用拉普拉斯变换法进行求解,这是必须注意的.

习　题　5.3

1. 假设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵,试证:

a) 对任意的常数 c_1, c_2 都有

$$\exp(c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{A})=\exp c_1\boldsymbol{A}\cdot\exp c_2\boldsymbol{A}$$

b) 对任意整数 k, 都有

$$(\exp\boldsymbol{A})^k=\exp k\boldsymbol{A}$$

(当 k 是负整数时, 规定 $(\exp\boldsymbol{A})^k=[(\exp\boldsymbol{A})^{-1}]^{-k}$)

2. 试证: 如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解, 那么

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp\boldsymbol{A}(t-t_0)]\boldsymbol{\eta}$$

3. 试计算下面矩阵的特征值及对应的特征向量.

a) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix}2 & -3 & 3\\ 4 & -5 & 3\\ 4 & -4 & 2\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ *d*) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$

4. 试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵, 并计算 $\exp\boldsymbol{A}t$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 为:

a) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}2 & -3 & 3\\ 4 & -5 & 3\\ 4 & -4 & 2\end{bmatrix}$ *d*) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 8 & 1 & -1\\ 5 & 1 & -1\end{bmatrix}$

5. 试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵, 并求满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$:

a) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 8 & 1 & -1\\ 5 & 1 & -1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}0\\ -2\\ -7\end{bmatrix}$

c) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

6. 试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$:

a) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}e^t\\ 1\end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ e^{-t}\end{bmatrix}$

c) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ -2\cos t\end{bmatrix}$

7. 假设m不是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值. 试证非齐线性方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}e^{mt}$$

有一解形如

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{p}e^{mt}$$

其中$\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{p}$是常数向量.

8. 给定方程组

$$\begin{cases}x_1''-3x_1'+2x_1+x_2'-x_2=0\\ x_1'-2x_1+x_2'+x_2=0\end{cases}$$

a) 试证上面方程组等价于方程组$\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$, 其中

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_1'\\ x_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

b) 试求a) 中的方程组的基解矩阵.

c) 试求原方程组满足初始条件

$$x_1(0)=0,\ x_1'(0)=1,\ x_2(0)=0$$

的解.

9. 试用拉普拉斯变换法解第5题和第6题.

10. 求下列初值问题的解:

a) $\begin{cases}x_1'+x_2'=0\\ x_1'-x_2'=1\end{cases}$ $\qquad \varphi_1(0)=1,\ \varphi_2(0)=0$

b) $\begin{cases}x_1''+3x_1'+2x_1+x_2'+x_2=0\\ x_1'+2x_1+x_2'-x_2=0\end{cases}$

$$\varphi_1(0)=1,\ \varphi_1'(0)=-1,\ \varphi_2(0)=0$$

c) $\begin{cases}x_1''-m^2x_2=0\\ x_2''+m^2x_1=0\end{cases}$

$$x_1(0)=\eta_1,\ x_1'(0)=\eta_2,\ x_2(0)=\eta_3,\ x_2'(0)=\eta_4$$

11. 假设$y=\varphi(x)$是二阶常系数线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''+ay'+by=0 \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$$

的解，试证

$$y=\int_0^x \varphi(x-t)f(t)dt$$

是方程

$$y''+ay'+by=f(x)$$

的解，这里 $f(x)$ 为已知连续函数.

本章学习要点

线性微分方程组理论是微分方程理论中非常值得重视的一部分内容. 无论从应用的角度或者从理论的角度来说，本章所提供的方法和结果都是重要的，它是进一步学习常微分方程理论和其他有关课程的必不可少的基础知识. 学习本章时应注意如下几点:

1° 理解线性微分方程组解的存在唯一性定理，进一步熟悉和掌握逐步逼近法. 要熟悉向量与矩阵的表述方法.

2° 掌握线性微分方程组的一般理论主要是了解它的所有解的代数结构问题. 这里的中心问题是齐线性微分方程组的基解矩阵的概念. 有了基解矩阵，齐线性微分方程组的任一解可由基解矩阵表示，而非齐线性微分方程组的任一解亦可通过积分由基解矩阵表示，这就是所谓常数变易公式. 一般理论的基本内容可以概括在定理 1*， 定理 2* 及常数变易公式(5.27)中. 读者可以此为线索了解有关内容.

3° 基解矩阵的存在与具体寻求是不同的两回事. 一般齐线性微分方程组的基解矩阵是无法通过积分得到的. 但当系数矩阵是常数矩阵时，可以通过代数方法求出基解矩阵，这时可利用矩阵指数 $\exp \boldsymbol{A}t$，给出基解矩阵的一般形式，而基解矩阵的具体计算

方法，主要是利用公式(5.52). 在理论上还要注意用约当标准型表示基解矩阵的方法.

拉普拉斯变换是求解常系数线性微分方程组的初值问题的一个简便方法，要懂得运用.

4° 掌握高阶线性微分方程与线性微分方程组的关系，懂得将线性微分方程组的有关结果推论到高阶线性微分方程上去，从而在一个统一的观点下理解这两部分的内容.

第六章　非线性微分方程和稳定性

§6.1　引　　言

前面第四章和第五章主要讨论的是线性微分方程(组). 正如我们所指出的，这在工程技术的应用上具有十分重要的意义，但由于物质运动的复杂性，对它的描述往往归结到一个非线性微分方程. 我们在第四章已经见到，非线性问题比线性问题要复杂得多，困难得多. 为了将问题线性化，必须经过理想化，忽略掉某些次要的因素. 当然要求这样简化的结果仍能反映物质运动的本质，而不致严重歪曲原来的运动规律. 显然，并非每个非线性问题都可简化成线性问题来处理的. 因此，自然地提出这样的问题：在什么条件下可以将非线性微分方程简化成线性微分方程来处理而不致产生太大的误差？当问题不允许线性化时，如何具体揭示物质运动的规律及研究它的属性呢？这正是本章所要讨论的主要问题.

让我们从一个简单的方程谈起.

考虑一阶非线性方程

$$\frac{dy}{dt}=Ay-By^2 \tag{6.1}$$

其中 A、B 为常数且 $A\cdot B>0$，初始条件给定为 $y(0)=y_0$.

易见，方程有两个常数解：

$$y_1(t)\equiv 0 \quad 和 \quad y_2(t)\equiv\frac{A}{B} \tag{6.2}$$

当 $y\neq 0$ 和 $y\neq\frac{A}{B}$ 时，方程(6.1)可改写成为

$$\frac{dy}{y(A-By)}=dt$$

或

$$\left(\frac{1}{y}+\frac{B}{A-By}\right)dy=Adt$$

两边积分即得

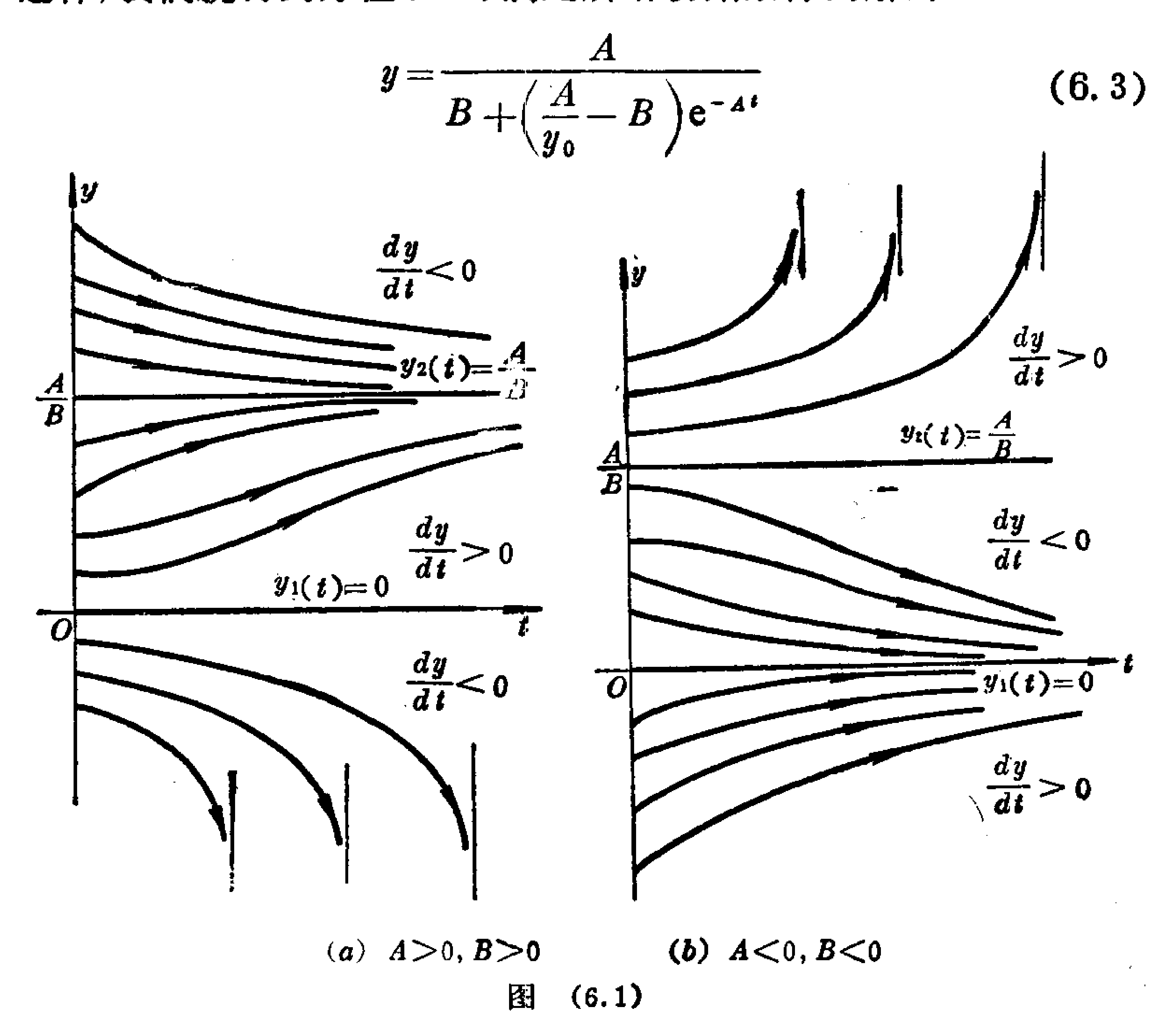
$$\ln|y|-\ln|A-By|=At+c$$

这就是方程（6.1）的通解，其中 c 为任意常数. 再利用初始条件 $y(0)=y_0\left(y_0\neq 0,\frac{A}{B}\right)$确定常数 c:

$$c=\ln\left|\frac{y_0}{A-By_0}\right|$$

这样，我们就得到方程(6.1)满足所给初始条件的解为

$$y=\frac{A}{B+\left(\frac{A}{y_0}-B\right)e^{-At}} \tag{6.3}$$



(a) $A>0, B>0$　　　(b) $A<0, B<0$

图 (6.1)

对应于初值 y_0 的所有可能情况，解(6.3)的图象如图(6.1)所示. 从图中可以看到，当 $A>0$，$B>0$ 时，满足初始条件 $y(0)=y_0>0$ 的所有解均渐近地趋于解$y_2(t)=\frac{A}{B}$；而当 $A<0$ 及 $B<0$时，满足初始条件 $y(0)=y_0<\frac{A}{B}$的解均趋于解 $y_1(t)=0$，但满足初始条件$y(0)=y_0>\frac{A}{B}$的解则趋向无穷，且以平行于 y 轴的直线为渐近线. 这些特性也可以由解的表达式(6.3) 直接推出. 在第一种情形，即 $A>0, B>0$ 时，解 $y_2(t)=\frac{A}{B}$被说成是稳定的，而对解 $y_1(t)=0$，由于满足初始条件 $y(0)=y_0<\frac{A}{B}$的解均越来越离开它，这样的解 $y_1(t)$被说成不是稳定的，或不稳定的；同样，在第二种情形，即 $A<0$ 和 $B<0$ 时，解 $y_1(t)$是稳定的，而解 $y_2(t)$为不稳定的.

稳定性的物理意义是明显的，因为用微分方程描述的物质运动(例如某一质点运动)的特解密切依赖于初值，而初值的计算或测定实际上不可避免地出现误差和干扰. 如果描述这运动的微分方程的特解是不稳定的，则初值的微小误差或干扰将招致“差之毫厘，谬以千里”的严重后果. 因此，这样不稳定的特解将不宜作为设计的依据；反之，稳定的特解才是我们最感兴趣的. 这说明解的稳定性的研究是一个十分重要的问题，可是大多数非线性微分方程是不可能或很难求出其解的具体表达式来的. 因此，必须要求在不具体解出方程的情况下判断方程的解的稳定性态.

现在给出微分方程的解的稳定性态的严格定义，对于一般的 n 阶微分方程

$$z^{(n)}=g(t;z,z',\cdots,z^{(n-1)}) \tag{6.4}$$

如果不仅把 z 而且把 $z',z'',\cdots,z^{(n-1)}$ 一并理解为未知函数，即取

变换

$$y_1=z, y_2=z', \cdots, y_n=z^{(n-1)}$$

则 n 阶方程(6.4)可以用一阶方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=y_2\\ \dfrac{dy_2}{dt}=y_3\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{dy_{n-1}}{dt}=y_n\\ \dfrac{dy_n}{dt}=g(t;y_1,y_2,\cdots,y_n)\end{cases}$$

代替.

因此,以后我们可以仅考虑一般的一阶方程组

$$\frac{dy_i}{dt}=g_i(t;y_1,y_2,\cdots,y_n)\quad i=1,2,\cdots,n$$

或写成向量形式

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{g}(t;\mathbf{y})\tag{6.5}$$

其中

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}\qquad \mathbf{g}(t;\mathbf{y})=\begin{bmatrix}g_1(t;y_1,y_2,\cdots,y_n)\\ g_2(t;y_1,y_2,\cdots,y_n)\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ g_n(t;y_1,y_2,\cdots,y_n)\end{bmatrix}$$

我们称向量函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是方程组(6.5)的解, 如果

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}(t)}{dt}\equiv\mathbf{g}(t;\boldsymbol{\varphi}(t))$$

在讨论方程组(6.5)的解的性态之前,首先要保证方程组(6.5)的初值问题的解具有存在、唯一等性质, 即要讨论方程组(6.5)的解的存在唯一性以及解的延拓和解对初值的连续性、可微性等,这

可概括为下面的定理. 由于定理的证明方法同一阶方程的情形类似，这里就不重复了.

设给定方程组(6.5)的初始条件为

$$\boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_0 \tag{6.6}$$

考虑包含点$(t_0,\boldsymbol{y}_0)=(t_0;y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0})$的某区域

$$\boldsymbol{R}:\quad |t-t_0|\leqslant a,\quad \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|\leqslant b$$

在本章中 $\boldsymbol{y}$ 的范数$\|\boldsymbol{y}\|$定义为$\|\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}$. 所谓 $\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})$在域 G 上关于 $\boldsymbol{y}$ 满足局部利普希茨条件是指：对于 G 内任一点$(t_0,\boldsymbol{y}_0)$，存在闭邻域 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{G}$，而 $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})$于 $\boldsymbol{R}$ 上关于 $\boldsymbol{y}$ 满足利普希茨条件，即存在常数$\boldsymbol{L}>0$，使得不等式

$$\|\boldsymbol{g}(t;\tilde{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{g}(t;\bar{\boldsymbol{y}})\|\leqslant L\|\tilde{\boldsymbol{y}}-\bar{\boldsymbol{y}}\|$$

对所有$(t,\tilde{\boldsymbol{y}}),(t,\bar{\boldsymbol{y}})\in\boldsymbol{R}$ 成立. L 称为利普希茨常数.

存在唯一性定理 如果向量函数 $\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})$ 在域 $\boldsymbol{R}$ 上连续且关于 $\boldsymbol{y}$ 满足利普希茨条件，则方程组(6.5)存在唯一解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0)$，它在区间$|t-t_0|\leqslant h$ 上连续，而且

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0;t_0,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{y}_0$$

这里 $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$, $M=\max\limits_{(t,y)\in\boldsymbol{R}}\|\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})\|$.

解的延拓与连续性定理 如果向量函数 $\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})$ 在某域 G 内连续，且关于$\boldsymbol{y}$满足局部利普希茨条件，则方程组(6.5)的满足初始条件(6.6)的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0)((t_0,\boldsymbol{y}_0)\in\boldsymbol{G})$ 可以延拓，或者延拓到$+\infty$(或$-\infty$)；或者使点$(t,\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0))$ 任意接近区域 G 的边界. 而解 $\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0)$作为 $t,t_0,\boldsymbol{y}_0$ 的函数在它的存在范围内是连续的.

可微性定理 如果向量函数 $\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})$及$\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$

在域 G 内连续，那么方程组(6.5)由初始条件(6.6)确定的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0)$ 作为 $t,t_0,\boldsymbol{y}_0$ 的函数，在它的存在范围内是连续可微的.

当我们研究方程(6.5)的解的性态时往往与具有某些特殊性质的特解联系在一起. 为研究方程组(6.5)的特解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 邻近的解的性态，通常先利用变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\varphi}(t) \tag{6.7}$$

把方程组(6.5)化为

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x}) \tag{6.8}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})-\frac{d\boldsymbol{\varphi}(t)}{dt}\\&=\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(t))-\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{\varphi}(t))\end{aligned}$$

此时显然有

$$\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{0})\equiv\boldsymbol{0} \tag{6.9}$$

而把方程组(6.5)的特解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)$变为方程组(6.8)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 于是，问题就化为讨论方程组(6.8)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 邻近的解的性态.

例如对方程(6.1)的特解 $y_2(t)=\frac{A}{B}$, 我们可以通过变换

$$x=y-\frac{A}{B}$$

把方程(6.1)变为方程

$$\frac{dx}{dt}=-Ax-Bx^2 \tag{6.10}$$

这样，讨论方程(6.1)的特解 $y_2(t)=\frac{A}{B}$的稳定性态便可以化为讨论方程(6.10)的零解 $x=0$ 的稳定性态.

下面给出方程组(6.8)的零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的稳定性——通常称为李雅普诺夫(Ляпунов)意义下的稳定性——的定义.

考虑微分方程组(6.8),假设其右端函数 $\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x})$ 满足条件(6.9)且在包含原点的域 G 内有连续的偏导数,从而满足解的存在唯一性、延拓、连续性和可微性定理的条件.

定义 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$(δ 一般与 ε 和 t_0 有关),使当任一 $\boldsymbol{x}_0$ 满足

$$\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\delta$$

时,方程组(6.8)的由初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 确定的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon \quad 对一切\ t\geqslant t_0,$$

则称方程组(6.8)的零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 为**稳定**的.

如果(6.8)的零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 稳定,且存在这样的 $\delta_0>0$ 使当

$$\|x_0\|<\delta_0$$

时,满 足初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均有

$$\lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\mathbf{0}$$

则称零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 为**渐近稳定**的.

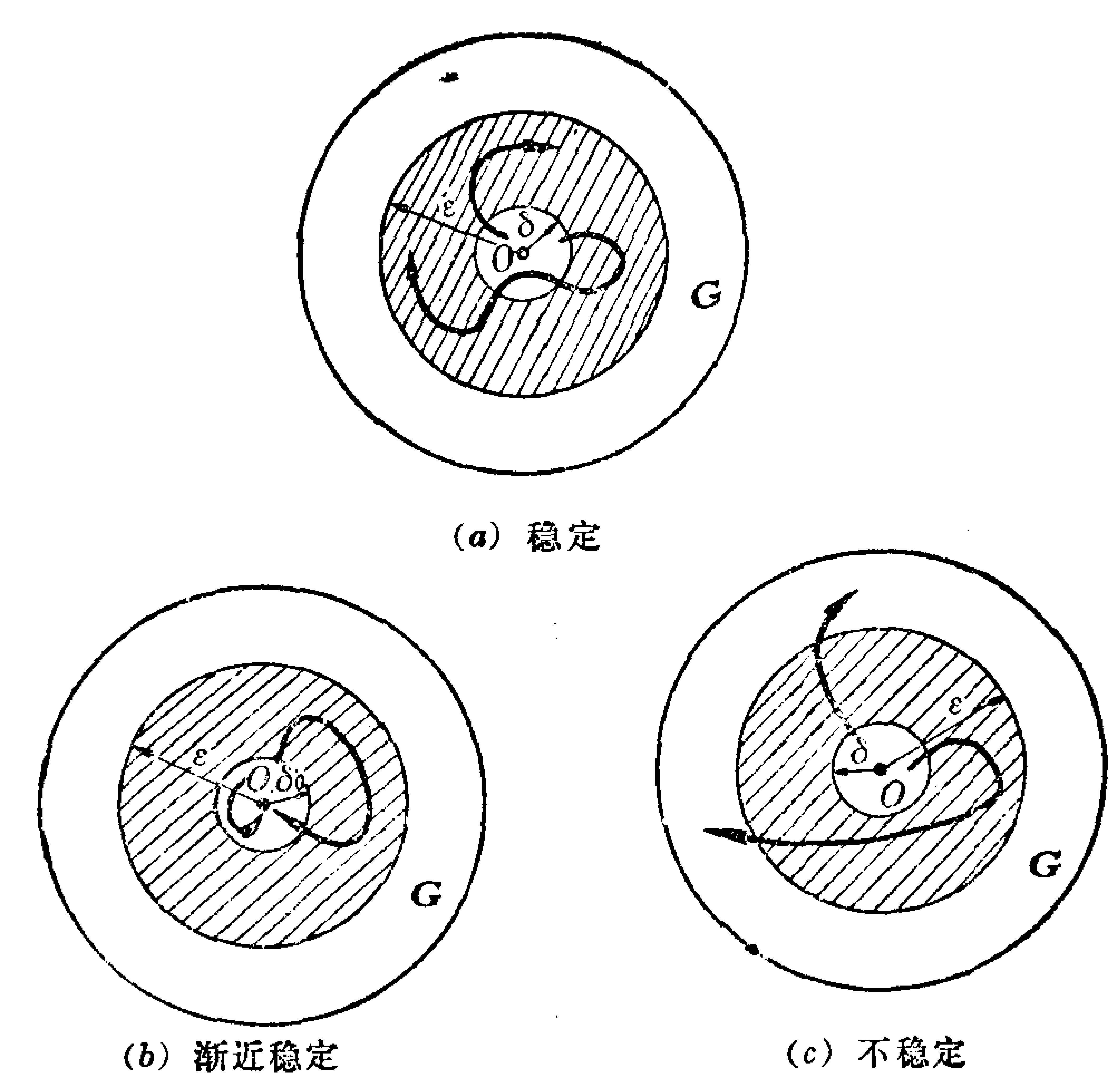
如果 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 渐近稳定,且存在域 $\boldsymbol{D}_0$,当且仅当 $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{D}_0$ 时满足初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\mathbf{0}$,则域 $\boldsymbol{D}_0$ 称为**(渐近)稳定域**或**吸引域**.若稳定域为全空间,即 $\delta_0=+\infty$,则称零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 为**全局渐近稳定**的或简称**全局稳定**的.

当零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 不是稳定时,称它是不稳定的.即是说:如果对某个给定的 $\varepsilon>0$ 不管 $\delta>0$ 怎样小,总有一个 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\delta$,使由初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 所确定的解 $\boldsymbol{x}(t)$,至少存在某个 $t_1>t_0$ 使得

$$\|\boldsymbol{x}(t_1)\|=\varepsilon$$

则称方程组(6.8)的零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 为**不稳定**的.

在二维情形零解的稳定性态,在平面上的示意图如图(6.2).



(a) 稳定

(b) 渐近稳定　　(c) 不稳定

图 (6.2) 零解的稳定性态

例如对方程(6.1)，当 $A<0$ 及 $B<0$ 时其零解 $y=0$ 为渐近稳定的，稳定域为 $y<\frac{A}{B}$. 这只要取 $\delta<\varepsilon$ 及 $\delta_0=\frac{A}{B}$即可. 事实上，由解的表达式(6.3)或图(6.1b)知道，当 $y_0<\frac{A}{B}$时解 $y(t)$ 有

$$|y(t)|\leqslant|y(t_0)|, \text{对一切 } t\geqslant t_0\geqslant 0 \text{ 成立.}$$

且

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0$$

故由定义，零解 $y=0$ 为渐近稳定的，稳定域为 $y<\frac{A}{B}$.

同样，当 $A>0, B>0$ 时，方程(6.10)的零解 $x=0$ 即方程(6.1)的解 $y_2(t)=\frac{A}{B}$为渐近稳定的，稳定域为$x>-\frac{A}{B}$ 或 $y>0$. 而当

$A>0, B>0$ 时方程 (6.1) 的零解 $y=0$ 和当 $A<0, B<0$ 时方程(6.10)的零解 $x=0$ 或方程(6.1) 的解 $y=\frac{A}{B}$都是不稳定的. 这同样可由解的表达式(6.3)直接推出或从图(6.1)看出.

习 题 6.1

1. 对下列方程, (a) 求出其常数特解(称为驻定解), 并画出方程的经过$(0, x_0)$的积分曲线的走向(草图), 从而判断各驻定解的稳定性; (b) 作变量变换, 使各驻定解对应于新方程的零解:

(1) $\frac{dx}{dt}=Ax+Bx^2, A>0, B>0, -\infty<x_0<+\infty$

(2) $\frac{dx}{dt}=x(x-1)(x-3)$

(3) $\frac{dx}{dt}=x(1-x)(x-3)$

2. 直接由(6.3)出发, 讨论方程(6.1)的解 $y_1(t)=0$ 和 $y_2(t)=\frac{A}{B}$ 的稳定性态(即稳定, 渐近稳定, 不稳定).

§6.2 相 平 面

现在讨论二阶微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=X(t; x, y) \\ \frac{dy}{dt}=Y(t; x, y) \end{cases} \tag{6.11}$$

它的解

$$x=x(t), \quad y=y(t) \tag{6.12}$$

在以 t, x, y 为坐标的(欧氏)空间中决定了一条曲线, 这曲线称为**积分曲线**. 假设方程右端的函数满足解的存在唯一性和连续性定理的条件, 例如存在连续偏导数, 此时空间的每一点都有一条且

只有一条积分曲线经过.

如果把时间 t 当作参数，仅考虑x, y 为坐标的(欧氏)空间，此空间称为方程组(6.11)的**相平面**(若方程组是高阶的，则称为**相空间**). 在相平面(相空间)中方程组的解所描述的曲线称为**轨线**.对一般的方程组 (6.11) 在相平面上一个点可能有不只一条轨线经过. 但如果方程组(6.11)是**驻定方程组**，即其右端函数不显含时间 t 的情形，此时(6.11)式变成:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=X(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt}=Y(x,y) \end{cases} \qquad (6.13)$$

那么只要不同时有 $X(x,y)=0, Y(x,y)=0$, 便可将方程组(6.13)改写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}, \qquad \text{当 } X(x,y)\neq 0 \text{ 时} \qquad (6.13a)$$

或

$$\frac{dx}{dy}=\frac{X(x,y)}{Y(x,y)}, \qquad \text{当 } Y(x,y)\neq 0 \text{ 时} \qquad (6.13b)$$

由于$\frac{Y}{X}$或$\frac{X}{Y}$与 X, Y 同样有连续偏导数，因而满足解的存在唯一性定理的条件，在 xy 平面的每一点，有且只有方程 (6.13a) 或 (6.13b) 的一条积分曲线经过，这些曲线又可以看成是方程组(6.13)在相平面上的轨线，所以在相平面上，驻定方程组(6.13)的轨线不能相交.

同时满足 $X(x,y)=0, Y(x,y)=0$ 的点(x^*, y^*)，称为方程组(6.13)的**奇点**，显然

$$x=x^*, y=y^*$$

是方程组的解.

下面我们考虑驻定方程组是线性的情形下其轨线在相平面上

的性态，并根据奇点邻域内轨线分布的不同性态来区分奇点的不同类型. 这时方程的形式为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=ax+by \\ \dfrac{dy}{dt}=cx+dy \end{cases} \tag{6.14}$$

显然，坐标原点 $x=0, y=0$ 是奇点. 如果方程组的系数满足条件

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6.15}$$

则此奇点还是唯一的. 下面的讨论将首先假定条件(6.15)成立.

根据线性代数理论可以通过非奇异的实线性变换

$$\begin{cases} \xi=k_{11}x+k_{12}y \\ \eta=k_{21}x+k_{22}y \end{cases} \tag{6.16}$$

把线性方程组(6.14)化成标准形式，其系数矩阵为下列四种形式之一:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ 为实数. 这些标准形式是根据方程组(6.14) 的特征方程

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=0$$

即

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0 \tag{6.17}$$

的根(称为特征根)的性质来确定的.

事实上，不难直接验证：当特征根 λ_1, λ_2 是相异实根时，则可按 $b\neq0$ 或 $c\neq0$ 的不同情况，分别采用线性变换

$$\xi=(d-\lambda_1)x-by, \qquad \eta=(d-\lambda_2)x-by$$

或

$$\xi=-cx+(a-\lambda_1)y,\quad \eta=-cx+(a-\lambda_2)y$$

把方程组(6.14)化为标准形式，其系数矩阵为 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$（在 $b=c=0$ 的情况下，方程组(6.14)本身已是标准形式了）；如果特征根是重根情形，即 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$，则当 $b\neq0$ 或 $c\neq0$ 时分别采用线性变换

$$\xi=x,\qquad \eta=(\lambda-d)x+by$$

或

$$\xi=y,\qquad \eta=cx+(\lambda-a)y$$

即可将方程组(6.14)化为标准形式，其系数矩阵为 $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$，而当 $b=c=0$ 时，原来方程已是标准形式，且其系数矩阵为 $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ 形状．最后，特征根是复根的情形，注意到系数 a, b, c, d 均是实数，特征根 λ_1, λ_2 必然彼此共轭，即 $\lambda_1=\overline{\lambda}_2$，这时若令 $\lambda_1=\alpha+i\beta$，则线性变换

$$\xi=-cx+(a-\alpha)y,\qquad \eta=\beta y$$

或

$$\xi=(d-\alpha)x-by,\qquad \eta=\beta x$$

均能将方程组(6.14)化成标准形式，且其系数矩阵为 $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$

由于线性变换(6.16)不改变奇点的位置，也不会引起相平面上轨线性态的改变，从而奇点的类型也保持不变．因此，为了简单起见，下面仅就标准形式的线性方程组讨论奇点的类型，至于一般方程组(6.14)在奇点邻域内轨线分布的图貌也同时附于相应的图中，以供比较．现按特征根为相异实根、重根或共轭复根，分五种情形进行讨论．

情形 I 同号相异实根　这时方程的标准形式为

$$\frac{d\xi}{dt}=\lambda_1\xi,\qquad \frac{d\eta}{dt}=\lambda_2\eta \tag{6.18}$$

其解为

$$\xi(t)=Ae^{\lambda_1 t},\quad \eta(t)=Be^{\lambda_2 t} \tag{6.19}$$

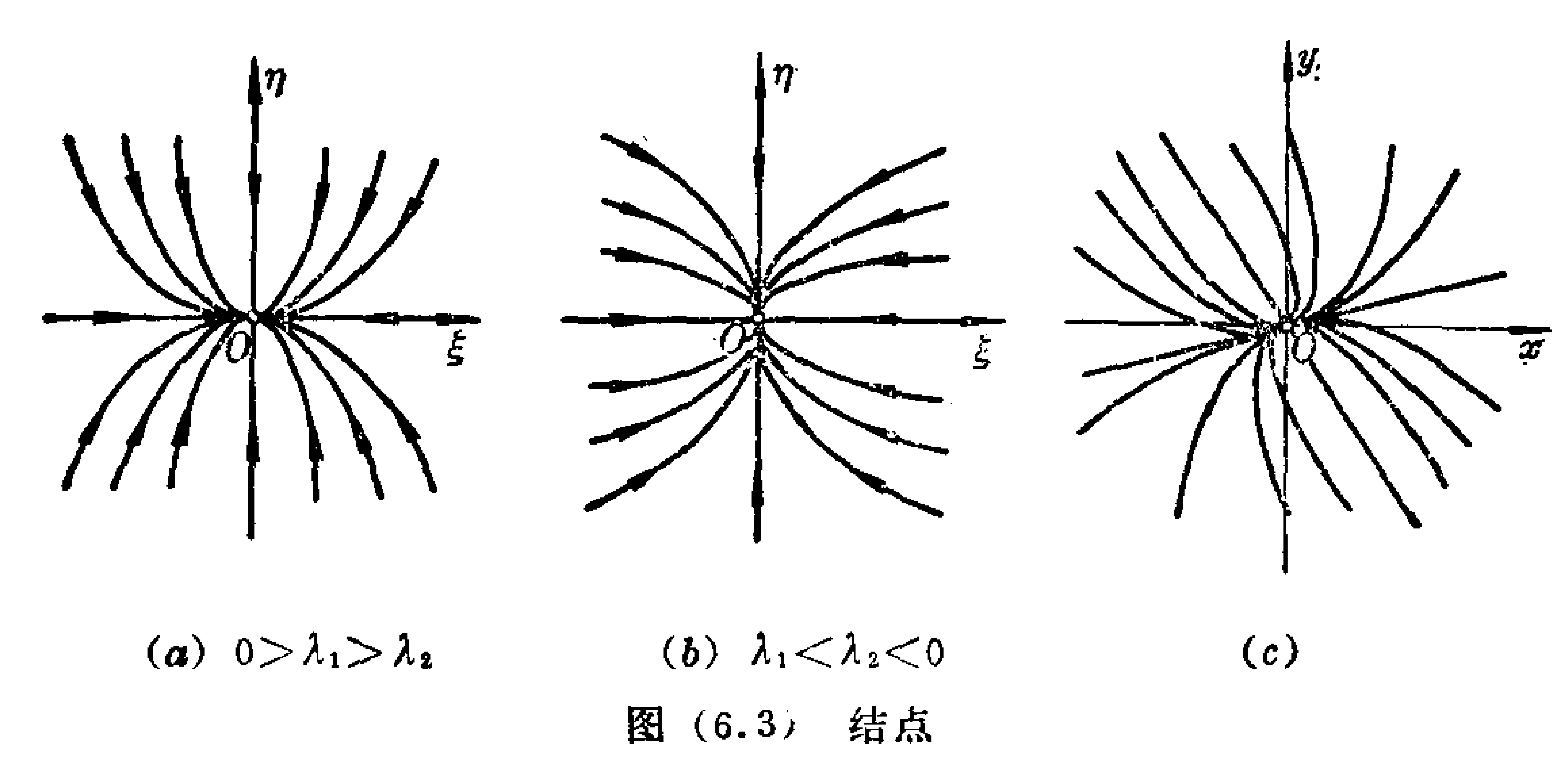
其中 λ_1,λ_2 为实特征根，而 A,B 是任意实常数.

首先假定 λ_1,λ_2 同为负实数. 此时易见，零解是渐近稳定的. 当 $B=0$ 时 ξ 轴的左半轴及右半轴本身为轨线；而当 $A=0$ 时 η 轴的上半轴及下半轴亦为轨线. 若 $A\cdot B\neq 0$，可分 $\lambda_1>\lambda_2$ 和 $\lambda_1<\lambda_2$ 两种情况.

如果 $\lambda_1>\lambda_2$，由解(6.19)，在轨线上 t 时刻的切线斜率 k 有

$$k=\frac{\eta(t)}{\xi(t)}=\frac{B}{A}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\longrightarrow 0(当\ t\to+\infty)$$

故轨线切 ξ 轴于原点. 相平面上轨线的形状如图(6.3a)所示.



(a) $0>\lambda_1>\lambda_2$　　(b) $\lambda_1<\lambda_2<0$　　(c)

图（6.3） 结点

如果 $\lambda_1<\lambda_2$，则有

$$\frac{1}{k}=\frac{\xi(t)}{\eta(t)}=\frac{A}{B}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\longrightarrow 0(当\ t\to+\infty)$$

这表明轨线切 η 轴于原点，如图(6.3b)所示.

从图(6.3)中可以看到，所有轨线趋于奇点，且除个别轨线外，它们在奇点处有公切线，其邻域内轨线具有这样性态的奇点称为**结点**.

如上所述，λ_1,λ_2 同为负实数时，方程的零解是渐近稳定的，我们称对应的奇点为**稳定结点**.

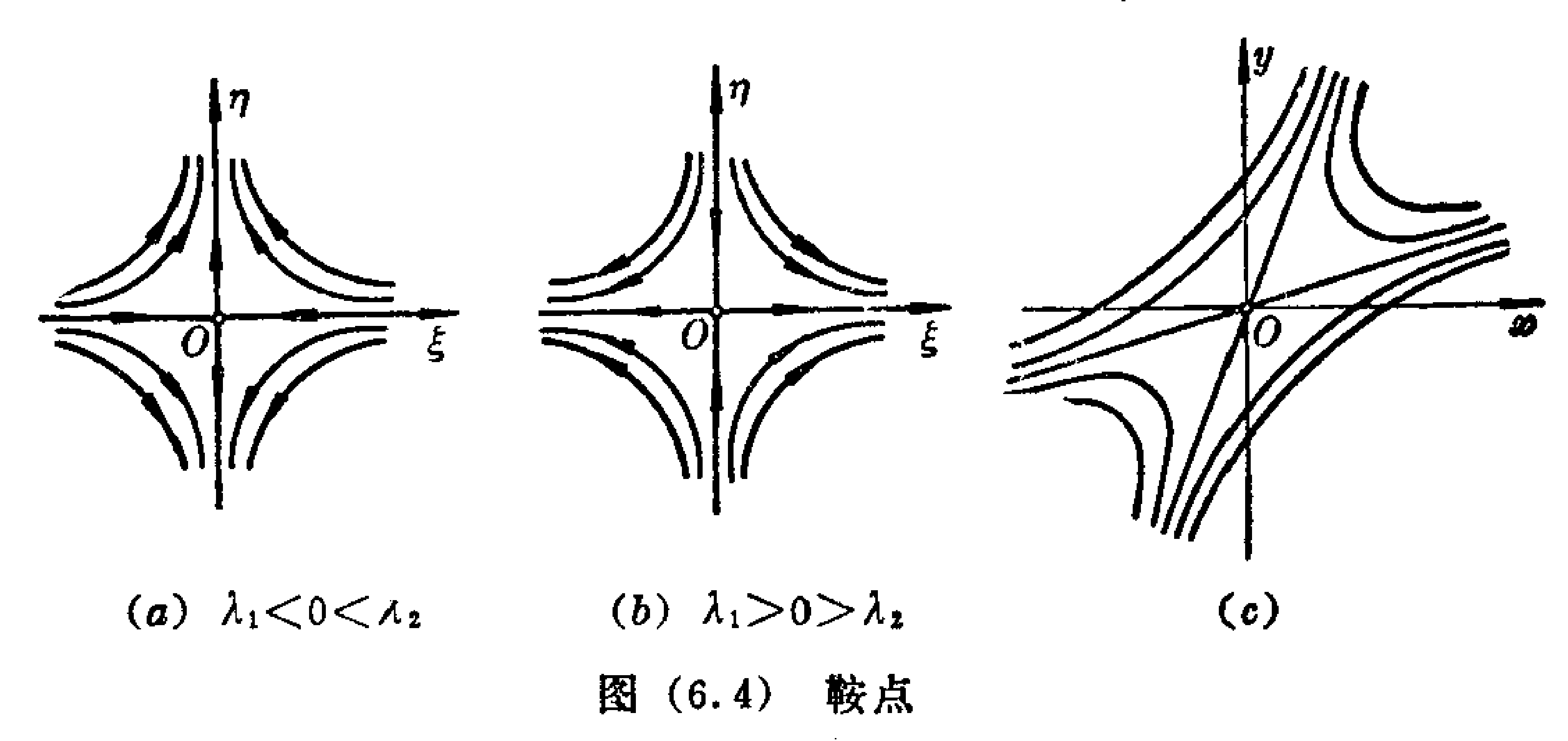
当λ_1和λ_2同为正实数时，上述讨论仍然有效，只需将 $t\to+\infty$ 改为 $t\to-\infty$，即图(6.3)中轨线的走向均须改为相反的方向，这时方程的零解为不稳定，而对应的奇点称为**不稳定结点**.

情形 II 异号实根　这时方程的标准形式及其解的表达式仍为(6.18)和(6.19)，不过其中 λ_1 和 λ_2 的符号相异.

解(6.19)中当 $B=0$ 或 $A=0$ 时其轨线分别为 ξ 轴的左、右半轴或 η 轴的上、下半轴，且其中一轴趋于原点，另一轴远离原点.

当 $A\cdot B\neq0$ 时，如 $\lambda_1<0<\lambda_2$，则由式(6.19)可知，当 $t\to+\infty$ 时，$\xi(t)\to0$，$\eta(t)\to+\infty$，轨线图貌如图(6.4a)所示. 如$\lambda_2<0<\lambda_1$，则有 $\xi(t)\to+\infty$，$\eta(t)\to0$(当 $t\to+\infty$)，轨线形状如图(6.4b).

由图(6.4)见到，在奇点邻域内，方程的轨线图貌如鞍形，这样的奇点称为**鞍点**. 显然，鞍点只能是不稳定的.



(a) $\lambda_1<0<\lambda_2$　　(b) $\lambda_1>0>\lambda_2$　　(c)

图 (6.4)　鞍点

情形 III 重根　这时可分两种情况讨论:

1) $b\neq0$ 或 $c\neq0$. 如前面所指出的，这时方程可化为如下标准形式

$$\frac{d\xi}{dt}=\lambda\xi+\eta,\quad \frac{d\eta}{dt}=\lambda\eta \tag{6.20}$$

其解为

$$\xi(t)=(At+B)e^{\lambda t},\ \eta(t)=Ae^{\lambda t} \tag{6.21}$$

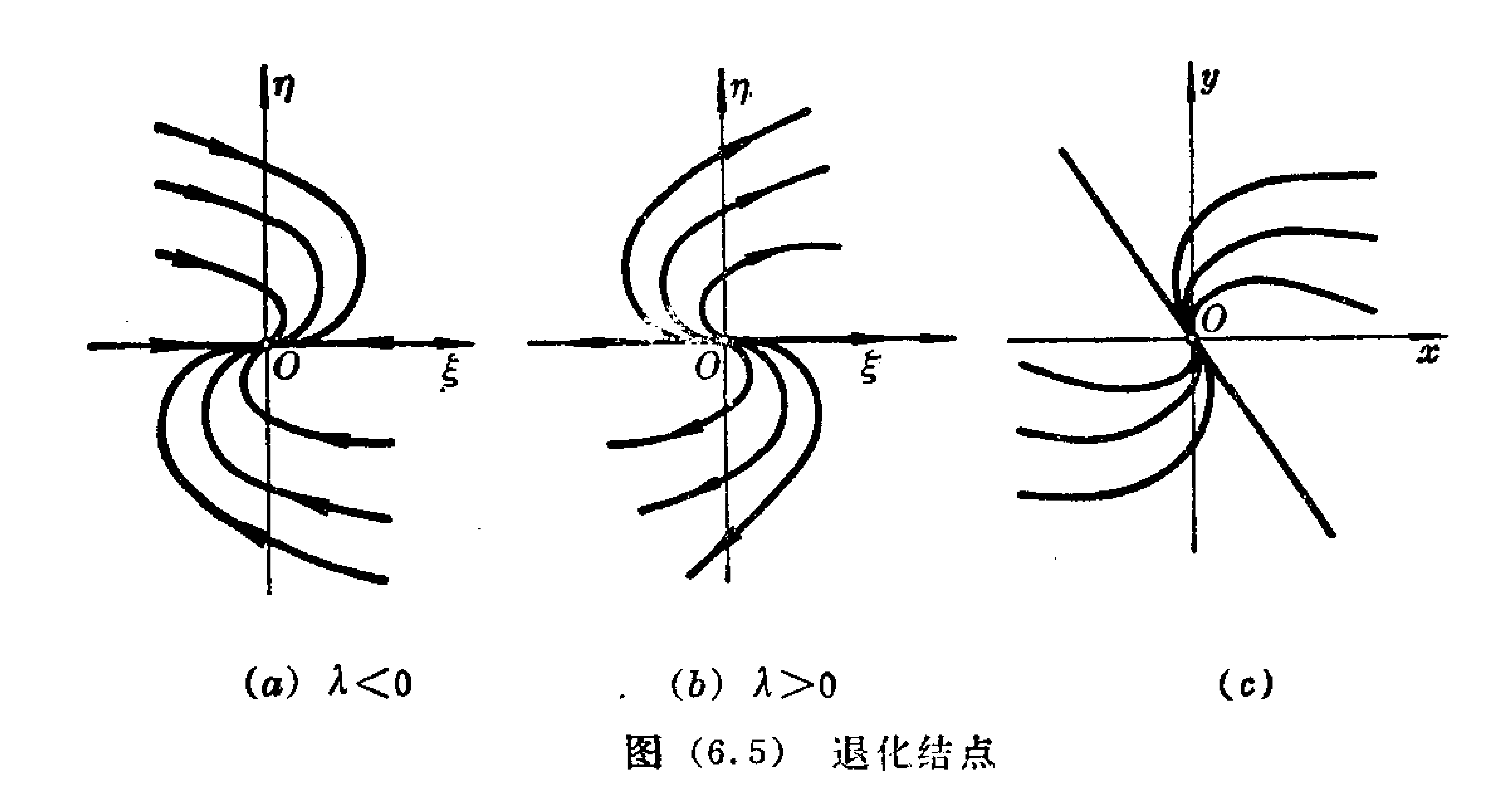
其中 λ 为实特征根，而 A, B 为任意实常数.

当 $\lambda<0$ 时，显然有 $\xi(t)\to 0, \eta(t)\to 0$(当 $t\to+\infty$)，因而方程的零解是渐近稳定的. 又由(6.21)知，当 $A=0$ 时，ξ 轴左、右半轴本身也是轨线，而当 $A\neq 0$ 时，由于

$$\frac{\eta(t)}{\xi(t)}=\frac{A}{At+B}\longrightarrow 0\ (当\ t\to\infty)$$

且当 $t=-\dfrac{B}{A}$ 时 $\xi(t)=0$，可知轨线越过 η 轴而切 ξ 轴于原点，如图(6.5a)所示. 所有轨线毫无例外地沿同一个方向(ξ 轴)趋于奇点，其附近轨线具有这种性态的奇点称为**退化结点**. 在此情形，奇点是稳定的，因此更称为**稳定退化结点**.

假若 $\lambda>0$，这时只要将 $t\to+\infty$ 改为 $t\to-\infty$，则前面讨论仍然有效. 轨线性态如图(6.5b)所示，奇点是**不稳定退化结点**.



(a) $\lambda<0$　　(b) $\lambda>0$　　(c)

图 (6.5) 退化结点

2) $b=c=0$，这时方程组(6.14)取形式

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x,\quad \frac{dy}{dt}=\lambda y,\quad \lambda=a=d$$

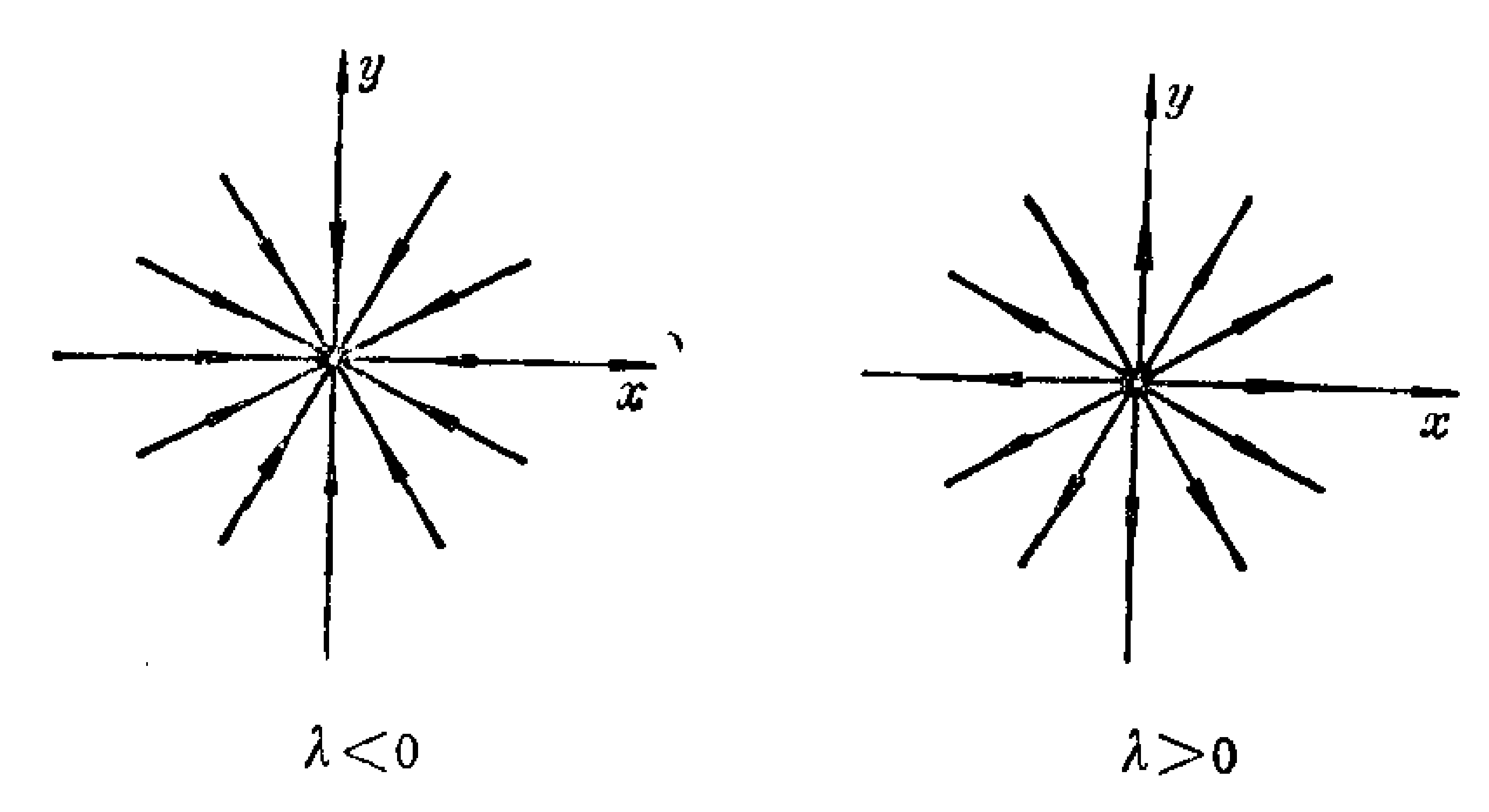
其解为

$$x(t)=Ae^{\lambda t},\quad y(t)=Be^{\lambda t}$$

于是

$$y=\frac{B}{A}x$$

此时，轨线是趋向(或远离)奇点的半射线，如图(6.6)所示. 轨线均沿确定的方向趋于(或远离)奇点，且不同轨线其切向也异，这样的奇点称为**奇结点**，且 $\lambda<0$ 时为稳定的，而 $\lambda>0$ 时为不稳定的.



$\lambda<0$ $\lambda>0$

图 (6.6) 奇结点

情形 IV 非零实部复根 这时方程的标准形式为

$$\frac{d\xi}{dt}=\alpha\xi+\beta\eta,\qquad \frac{d\eta}{dt}=-\beta\xi+\alpha\eta \tag{6.22}$$

这里 α、β 分别为特征根的实部和虚部. 引入极坐标，即令 $\xi=r\cos\theta$, $\eta=r\sin\theta$，再注意到

$$\xi\frac{d\xi}{dt}+\eta\frac{d\eta}{dt}=r\frac{dr}{dt},\qquad \xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}=r^2\frac{d\theta}{dt}$$

则由(6.22)可以得到

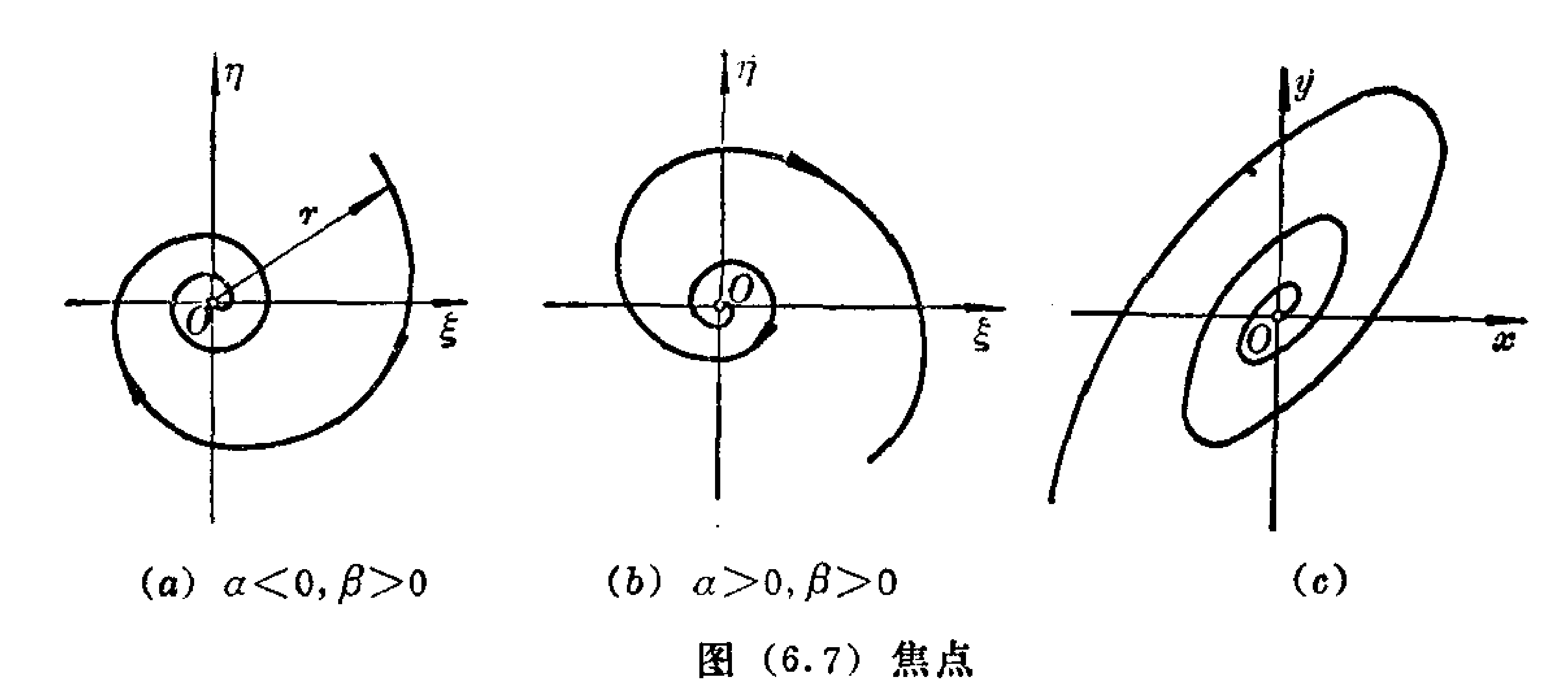
$$\frac{dr}{dt}=\alpha r,\qquad \frac{d\theta}{dt}=-\beta$$

由此得到方程(6.22)的解的极坐标形式

$$r=Ae^{\alpha t},\qquad \theta=-\beta t+B \tag{6.23}$$

其中 $A>0$ 和 B 为任意常数.

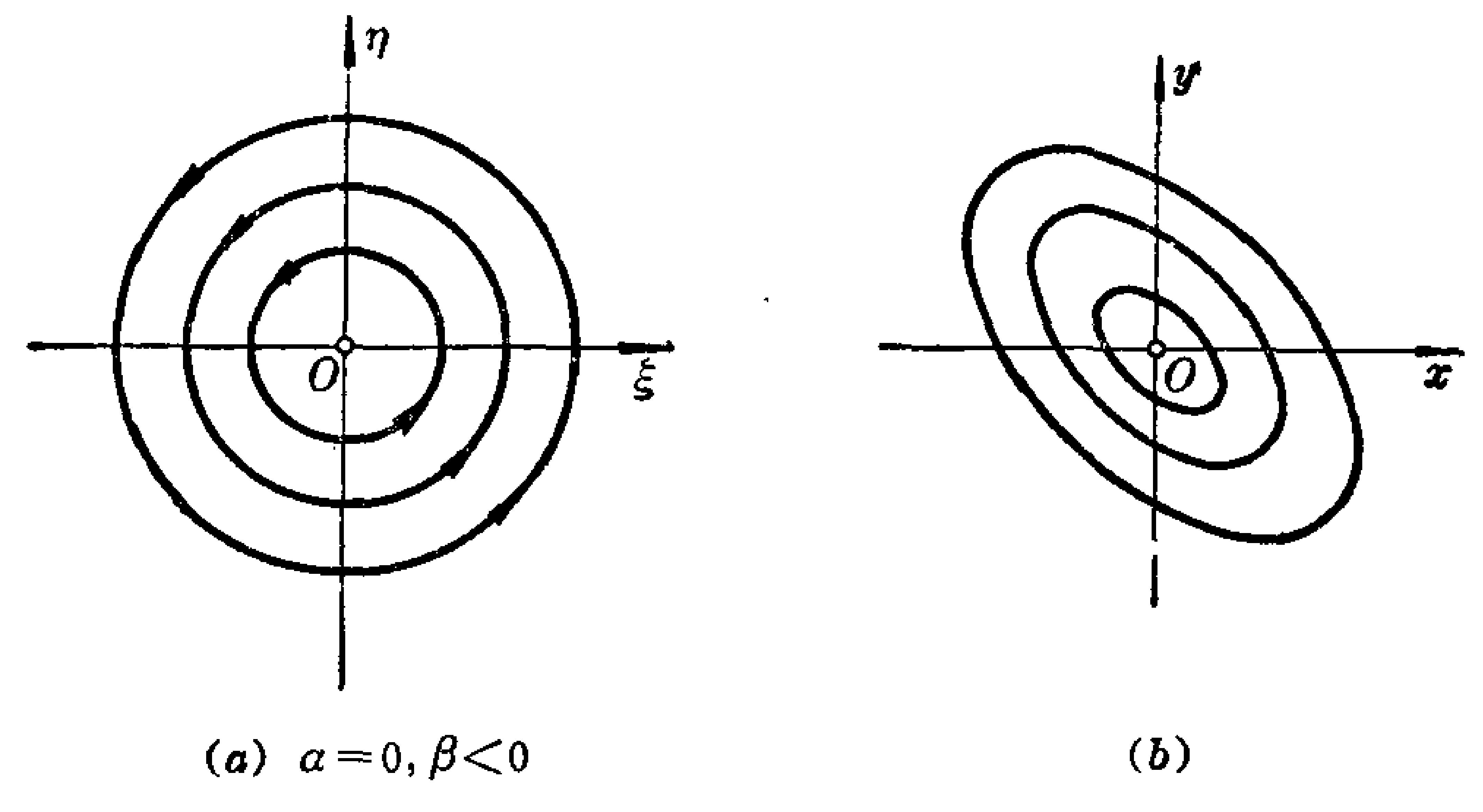
从(6.23)直接看出，轨线为一族对数螺旋线，依顺(反)时针方向盘旋地趋近或远离原点，如图(6.7)所示. 此时，奇点称为**焦点**，且 $\alpha<0$ 时为稳定的，而 $\alpha>0$ 时为不稳定的.



(a) $\alpha<0,\beta>0$　　(b) $\alpha>0,\beta>0$　　(c)

图 (6.7) 焦点

情形 V 纯虚根　这相当于情形 IV 中 $\alpha=0$ 的情形. 易见这时轨线为以原点为中心的一族圆，如图(6.8)所示. 此时，奇点称为**中心**. 显然，在这种情形下零解为稳定但非渐近稳定的.



(a) $\alpha=0,\beta<0$　　(b)

图 (6.8) 中心

综上讨论，可得下面定理:

定理 1　如果二阶线性驻定方程组 (6.14) 的系数满足条件 (6.15)，则方程的零解(奇点)将依特征方程(6.17)的根的性质而分别具有如下的不同特性:

1) 如果特征方程的根 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 为实根，则 $\lambda_1\lambda_2>0$ 时奇点为结点，且当 $\lambda_1<0$ 时结点是稳定的，而对应的零解为渐近稳定的，但当 $\lambda_1>0$ 时奇点和对应的零解均是不稳定的；当 $\lambda_1\lambda_2<0$ 时奇点为鞍点，零解为不稳定的.

2）如果特征方程具有重根 λ，则奇点通常为退化结点，但在 $b=c=0$ 的情形奇点为奇结点．又当 $\lambda<0$ 时，这两类结点均为稳定的，而零解为渐近稳定的，但当 $\lambda>0$ 时奇点和对应的零解均为不稳定的．

3）如果特征方程的根为共轭复根，即 $\lambda_1=\bar{\lambda}_2$，则当 $\mathrm{Re}\lambda_1\neq0$ 时奇点为焦点，且当 $\mathrm{Re}\lambda_1<0$ 时焦点是稳定的，对应的零解为渐近稳定的，而当 $\mathrm{Re}\lambda_1>0$ 时奇点和对应的零解均为不稳定的；当 $\mathrm{Re}\lambda_1=0$ 时奇点为中心，零解为稳定但非渐近稳定的．

上述奇点的类型和特征方程的根之间的关系还可以用图表来明了地表出．例如，引入符号

$$p=-(a+d),\ q=ad-bc$$

而将特征方程(6.17)写成

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

则可以利用方程的根 λ_1,λ_2 与系数 p,q 之间的关系，通过 λ_1,λ_2 为媒介，在以 p,q 为直角坐标的平面 (p,q) 上明了地划分出各种类型奇点的分布区域，如图(6.9)所示（图中抛物线的方程为 $p^2-4q=0$）．

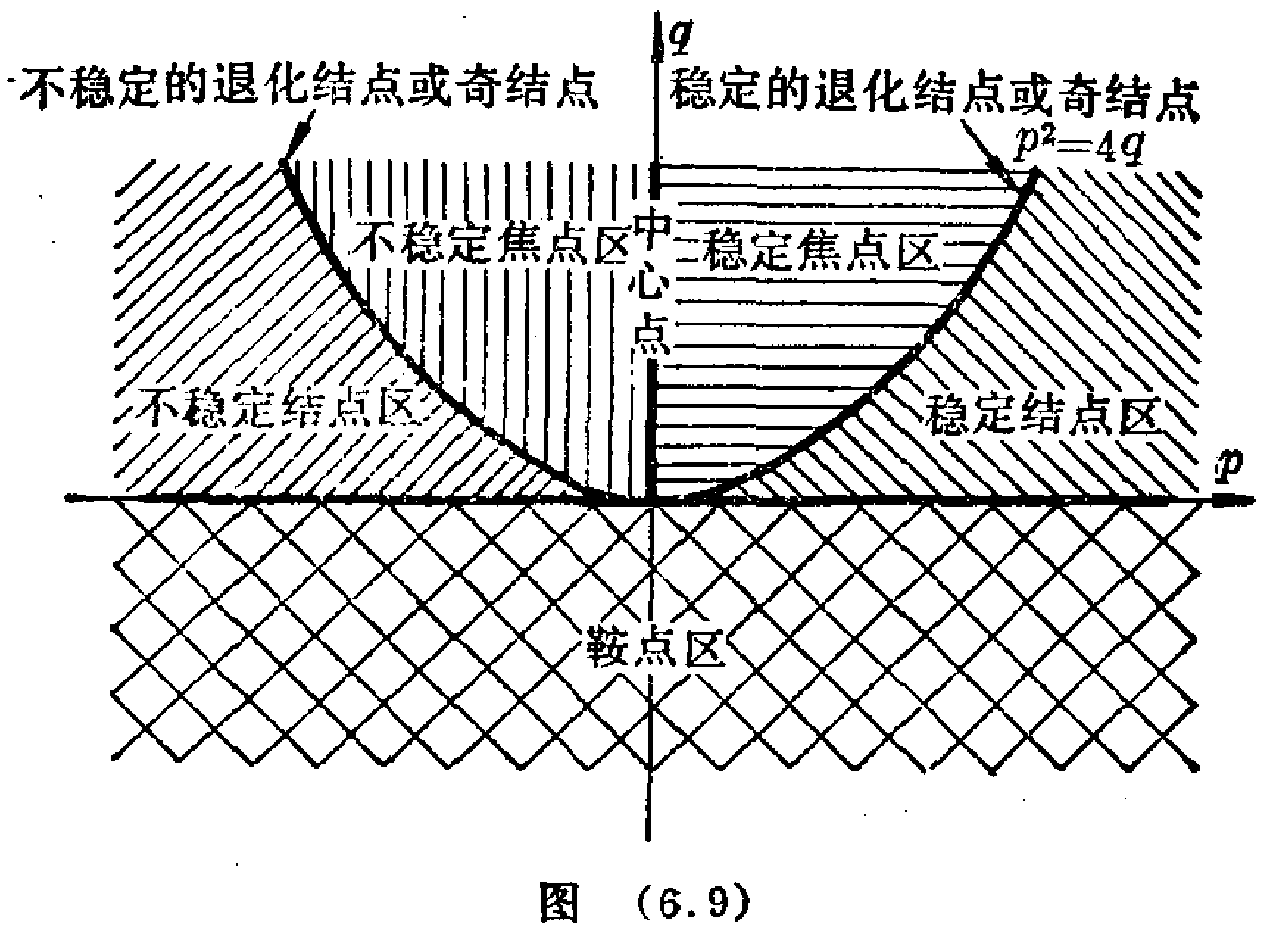


图 (6.9)

例 考虑二阶线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0$$

通过变换$\frac{dx}{dt}=y$可将它化为下列方程组

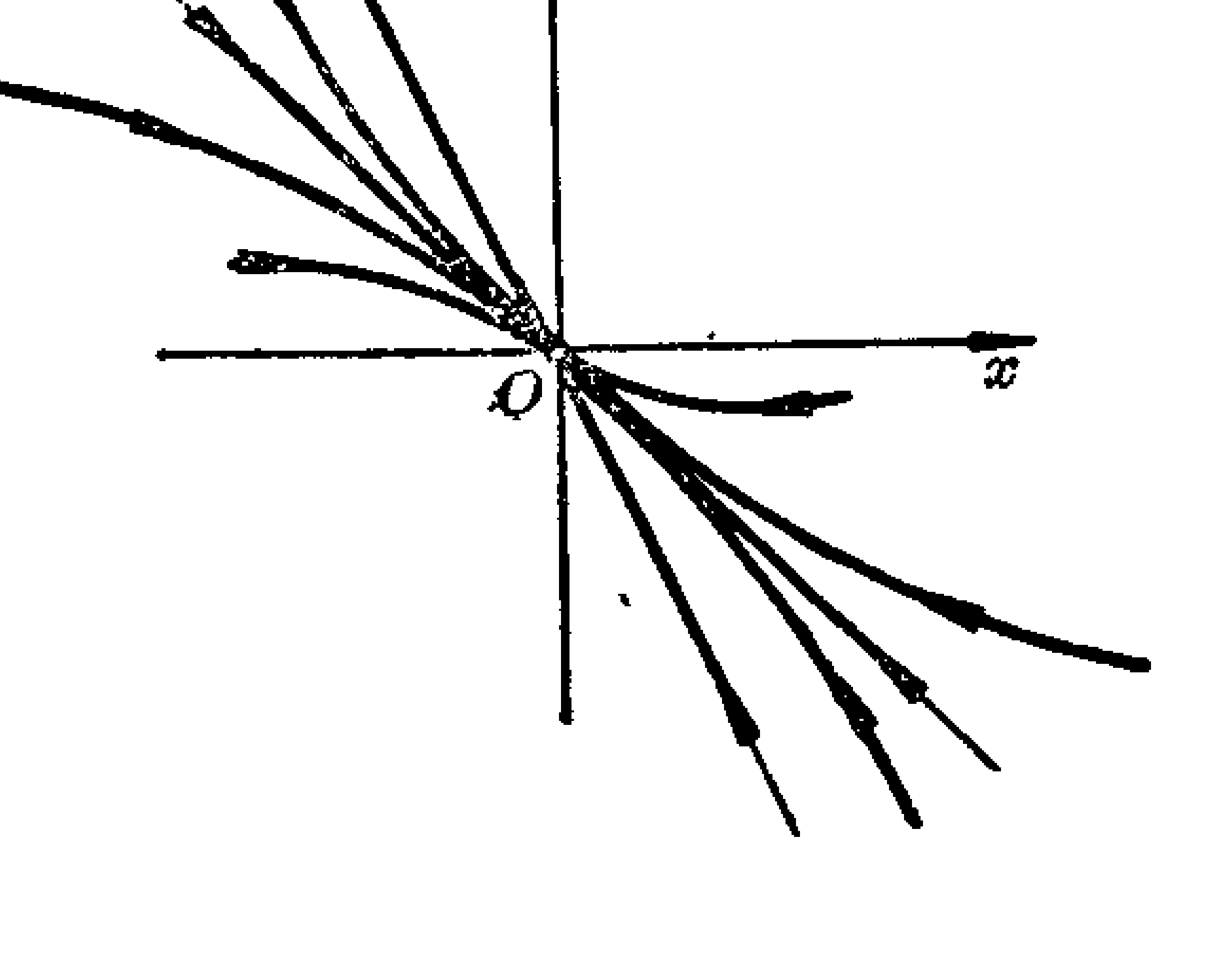


图 (6.10)

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y\\ \frac{dy}{dt}=-2x-3y\end{cases}$$

由直接计算可得其特征方程的根为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$，是一对相异负实根，根据定理 1 可知奇点是一个稳定结点. 又 $\lambda_1>\lambda_2$，根据前面的讨论知道，在 $\xi\eta$ 平面上于奇点附近轨线分布如图 (6.3a) 所示. 为画出轨线在 xy 相平面上的图貌，必须根据线性变换(6.16)具体求出 ξ 轴和 η 轴在 xy 相平面上所对应的直线方程. 在此，由前面的讨论，我们容易将它们写出如下

$$x+y=0 \quad 和 \quad 2x+y=0$$

由此不难画出轨线的图貌如图(6.10).

在上面的讨论中假设条件(6.15)成立，即特征方程(6.17)没有零根的情形. 现在我们来讨论特征方程有零根的情形. 这时，特征方程(6.17) 为

$$\lambda^2-(a+d)\lambda=0$$

特征根为 $\lambda_1=0$ 和 $\lambda_2=a+d$.

由于 $ad-bc=0$. 如果 $a\neq0$ 或 $b\neq0$，则方程组(6.14)可以写成

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=ax+by\\ \frac{dy}{dt}=k(ax+by)\end{cases} \tag{6.14*}$$

这里 $k=\frac{c}{a}$或$\frac{d}{b}$为常数.

此时直线 $ax+by=0$ 上任何点均为方程组的奇点，这样的直线称为

奇线.

由(6.14)* 得到

$$\frac{dy}{dx}=k$$

这表明在相平面上方程(6.14)* 的轨线是一族平行直线

$$y=kx+A \tag{6.24}$$

其中 A 为任意常数.

现在讨论轨线的走向. 由(6.14)*, 我们有

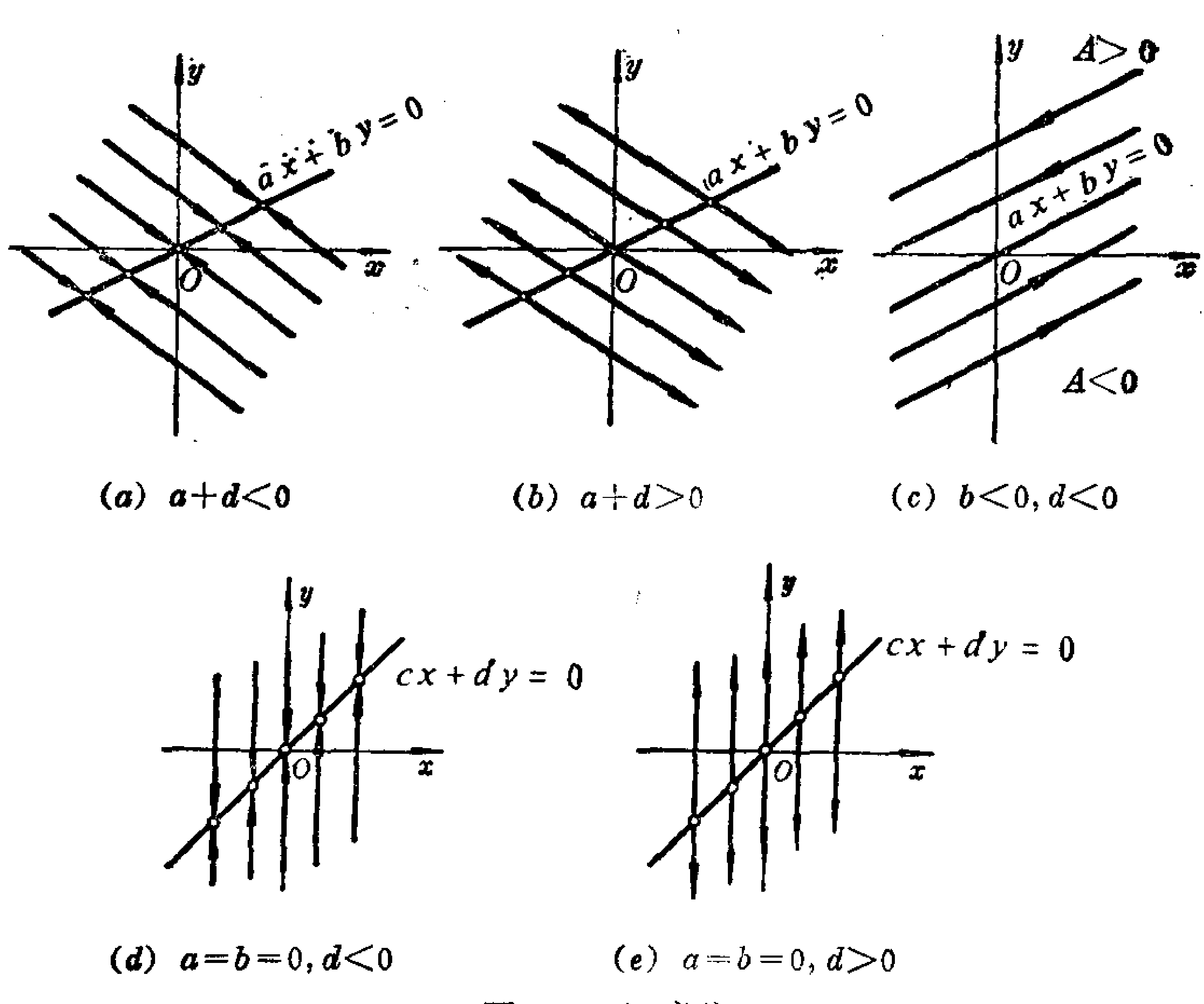
$$\frac{d}{dt}(ax+by)=a\frac{dx}{dt}+b\frac{dy}{dt}=(a+bk)(ax+by)=\lambda_2(ax+by)$$

由此得到

$$ax+by=Be^{\lambda_2 t}$$

这里 B 为任意常数.

由此看到, 当 $\lambda_2<0$ 时轨线随着 $t\to+\infty$ 而趋于奇线上的某一点, 如图(6.11a)所示. 而当 $\lambda_2>0$ 时轨线的走向刚好跟上一情形取相反的方向, 如图(6.11b)所示.



(a) $a+d<0$　　(b) $a+d>0$　　(c) $b<0, d<0$

(d) $a=b=0, d<0$　　(e) $a=b=0, d>0$

图 (6.11) 奇线

如果 $\lambda_2=0$ 即 $a+d=a+kb=0$，这时 $\lambda=0$ 是特征方程的重根．而奇线 $ax+by=b(y-kx)=0$ 同轨线(6.24)是平行的．将(6.24)代入(6.14)* 然后积分就得到

$$\begin{cases}x=bAt+C\\ y=bkAt+D=dAt+D\end{cases}$$

这里 C, D 是积分常数．

由上式可以看出，轨线的走向将依赖于 b、d 和 A 的符号，例如当 $b<0$ 和 $d<0$ 从而 $k>0$ 时，轨线分布如图(6.11c)所示．奇线 $ax+by=0$ 把相平面划分为两个区域，位于不同区域的轨线走向刚好相反．

如果 $a=b=0$ 但 $c^2+d^2\neq0$，则奇线是 $cx+dy=0$，轨线是 $x=E$，其中 E 为任意常数，即轨线平行于 y 轴，如图(6.11d, e)．

当 $a=b=c=d=0$ 时显然奇点充满全平面．

上述讨论结果可概括为如下定理．

定理 1* 对于二阶线性方程组(6.14)，如果其系数不全为零，则当特征方程(6.17)具有零根时，其在相平面上的轨线是一族平行直线．并且存在一条由奇点组成的直线——奇线，奇线通过原点而把相平面划分成为轨线不同走向的两个区域．当零根是单根时轨线随 $t\to+\infty$ 而趋近或远离奇线取决于 $a+d<0$ 或 $a+d>0$；当零根为重根时，轨线平行于奇线．如果线性方程组(6.14)的系数全为零，则奇点充满全平面．

这一节我们详细讨论了二阶线性驻定方程组(6.14)的轨线在相平面上的图貌．值得注意的是，轨线定义在整个相平面上，而积分曲线

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

在整个平面上有定义，不管 t 取正的或负的任何值，解均有意义．这跟上一节在稳定性定义中仅考虑 $t\geq t_0$ 的情况有所不同．

解对 t 可以在正或负方向上无限延伸的这种特性是后面第五节中讨论周期解和极限圈问题的前提．

习　题　6.2

1．试求下列线性方程组的奇点，并通过变换将奇点变为原点，进一步判

断奇点的类型及稳定性:

(1) $\frac{dx}{dt}=-x-y+1,\qquad \frac{dy}{dt}=x-y-5$

(2) $\frac{dx}{dt}=2x-7y+19,\qquad \frac{dy}{dt}=x-2y+5$

2. 试讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=ax+by,\qquad \frac{dy}{dt}=cy$$

的奇点类型, 其中 a、b、c 为实常数且 $ac\neq0$.

3. 对线性方程组

$$\frac{dx}{dt}=ax+by,\qquad \frac{dy}{dt}=cx+dy$$

其中 a, b, c, d 为实常数, 记 $p=-(a+d)$, $q=ad-bc$, $\Delta=p^2-4q$,

(1) 试用 $p, q\Delta$ 的符号确定方程组的奇点的可能类型(鞍点, 结点, 焦点, 中心);

(2) 试用 p, q 的符号确定方程组零解的稳定性.

4. L-R-C 振动回路(如图(6.12))中电流变化规律满足微分方程:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=0$$

$$(L>0,\ R\geqslant0,\ C>0)$$

试讨论这一系统的平衡状态(即方程的奇点)的可能类型.

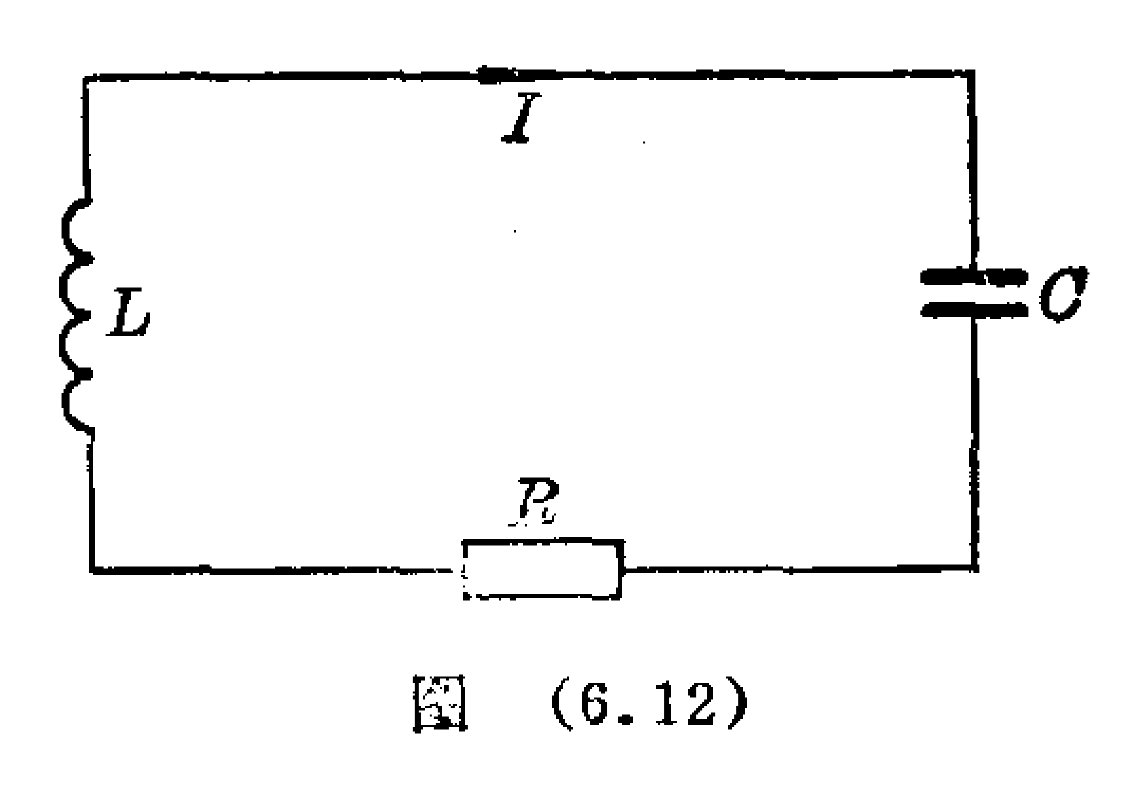


图 (6.12)

§6.3 按线性近似决定微分方程组的稳定性

前面对二阶常系数线性微分方程组的奇点的讨论虽然可以进一步推广到三阶或更高阶的线性方程组. 但由于空间及更高维的相空间中轨线图貌过于复杂难以具体作出,而且在实际问题中,往往主要先考虑其稳定性态,这是可以或较容易解决的. 因此,在这一节我们将先讨论 n 阶线性方程组零解的稳定性, 然后研究按线性近似决定微分方程组的稳定性态的问题.

考虑 n 阶常系数线性微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5.33}$$

由第五章 § 5.3 的(5.52)式知道，它的任一解均可表为形如

$$\sum_{m=0}^{l_i} c_{im}t^m\mathrm{e}^{\lambda_i t} \quad (i\leqslant n) \tag{6.25}$$

的线性组合，这里 λ_i 为方程组(5.33)的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=0 \tag{6.26}$$

的根($\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵)，l_i 为零或正整数，由根 λ_i 的初级因子的次数决定.

根据(6.25)，与第五章的定理 11 相对应的我们可以得到如下的结论:

定理 2 若特征方程 (6.26) 的根均具有负实部，则方程组(5.33)的零解是渐近稳定的. 若特征方程(6.26)具有正实部的根，则方程组(5.33)的零解是不稳定的. 若特征方程(6.26)没有正实部的根，但有零根或具零实部的根，则方程组(5.33)的零解可能是稳定的也可能是不稳定的，这要看零根或具零实部的根其初级因子的次数是否等于 1 而定.

现在考虑非线性微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \tag{6.27}$$

其中 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，且满足条件

$$\frac{\|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\to 0 \ (\text{当}\|\boldsymbol{x}\|\to 0\text{ 时}) \tag{6.28}$$

显然 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是方程组(6.27)的解.

对于非线性微分方程组(6.27)的稳定性态，自然会提出这样的问题：在什么条件下，(6.27) 零解的稳定性能由线性方程组(5.33)的零解的稳定性来决定. 这便是所谓按线性近似决定稳定

性的问题. 我们有下面的结论:

定理 3 若特征方程(6.26)没有零根或零实部的根，则非线性方程组(6.27)的零解的稳定性态与其线性近似的方程组(5.33)的零解的稳定性态一致. 这就是说，当特征方程(6.26)的根均具有负实部时，方程组(6.27)的零解是渐近稳定的，而当特征方程具有正实部的根时，其零解是不稳定的.

至于特征方程(6.26)除有负实部的根外还有零根或具零实部的根的情形，非线性方程组(6.27)的零解的稳定性态并不能由线性近似方程组(5.33)来决定. 因为可以找到这样的例子，适当变动 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$(当然条件(6.28)仍满足)，便可使非线性方程组(6.27)的零解是稳定的或是不稳定的，这种情形称为**临界情形**. 如何解决临界情形的稳定性问题，是常微分方程稳定性理论的重大课题之一.

关于定理 3 的证明，最早是由李雅普诺夫用他所发展的第二方法解决的. 我们把它留在后面 § 6.6 中再补充证明.

例 1 考虑有阻力的数学摆的振动，其微分方程为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0 \tag{6.29}$$

这里长度 l, 质量 m 和重力加速度 g 均大于0, 并设阻力系数 $\mu>0$. 令 $x=\varphi$, $y=\dfrac{d\varphi}{dt}$, 将方程(6.29)化为二阶方程组

$$\frac{dx}{dt}=y, \qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin x-\frac{\mu}{m}y \tag{6.30}$$

原点是方程组的奇点. 为了判别能否按线性近似来确定零解的稳定性态，将方程组改写成

$$\frac{dx}{dt}=y, \qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}x-\frac{\mu}{m}y-\frac{g}{l}(\sin x-x)$$

于是相应的线性近似方程组为

$$\frac{dx}{dt}=y, \qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}x-\frac{\mu}{m}y \tag{6.31}$$

而非线性项

$$R(x,y)=-\frac{g}{l}(\sin x-x)=-\frac{g}{l}\left(-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)$$

满足条件(6.28).

线性方程组(6.31)的特征方程为

$$\lambda^2+\frac{\mu}{m}\lambda+\frac{g}{l}=0$$

其根是

$$\lambda_{1,2}=-\frac{\mu}{2m}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2-4\frac{g}{l}}$$

应用定理 1 和定理 3, 可以得到如下结论:

(1) 若$\left(\frac{\mu}{m}\right)^2-4\frac{g}{l}>0$, 则特征方程的根为两个相异的负实根, 线性方程组(6.31)的奇点为稳定结点, 而相应的非线性方程组(6.30)的零解是渐近稳定的.

(2) 若$\left(\frac{\mu}{m}\right)^2-4\frac{g}{l}=0$, 这时特征方程的根为相等的负实根, 在这里 $b=1$, $c=-\frac{g}{l}$, $b^2+c^2\neq0$, 故线性方程组(6.31)的奇点为稳定的退化结点, 非线性方程组(6.30)的零解是渐近稳定的.

(3) 若$\left(\frac{\mu}{m}\right)^2-4\frac{g}{l}<0$, 则特征方程的根为一对带负实部的共轭复根, 线性方程组的奇点是稳定焦点, 而非线性方程组的零解为渐近稳定的.

综上所述, 当摆有阻力时, 其微分方程组(6.30)的零解是渐近稳定的.

对于方程(6.30), 其奇点除原点外, 还有 $x=n\pi$($n=\pm1$, ±2,

…)，$y=0$ 也是奇点．由于 $\sin x$ 的周期性，只要再分析一下奇点$(\pi,0)$的性态就可以了．

为了研究对应于奇点$(\pi,0)$的解的稳定性，作变换 $x^*=x-\pi$，$y^*=y$，于是方程组(6.30)化为

$$\frac{dx^*}{dt}=y^*,\ \frac{dy^*}{dt}=\frac{g}{l}\sin x^*-\frac{\mu}{m}y^* \qquad (6.30)^*$$

它的线性近似方程组为

$$\frac{dx^*}{dt}=y^*,\ \frac{dy^*}{dt}=\frac{g}{l}x^*-\frac{\mu}{m}y^*$$

而对应的特征方程的根为

$$\lambda_{1,2}=-\frac{\mu}{2m}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2+4\frac{g}{l}}$$

这是一对异号实根．依定理 1 及定理 3 知道线性方程组的奇点为鞍点，而非线性方程组$(6.30)^*$的零解是不稳定的，即非线性微分方程组 (6.30) 的解 $x=\pi$, $y=0$ 是不稳定的．上述结论对解 $x=\pm(2k+1)\pi$, $y=0$(k 为正整数)同样正确．

如果摆没有阻力，即阻力系数 $\mu=0$，则其线性方程组(6.31)的特征方程的根为

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{g}{l}}$$

是一对纯虚根，依定理 1，原点是中心型奇点．此时相应的非线性方程组(6.30)的零解的稳定性态无法决定，属于临界情形．但对方程组$(6.30)^*$，其线性组的特征根仍为一对异号实根，故当没有阻力即 $\mu=0$ 时，方程组(6.30)的解 $x=\pi$, $y=0$ 仍是不稳定的．

定理 3 说明非线性微分方程组(6.27)零解是否为渐近稳定的取决于其相应的特征方程(6.26)的全部的根是否具有负实部．但当 n 相当大时，(6.26)的根是不容易甚至不能具体地用公式表达出来的．不过，我们并不要求找出特征方程的全部根，而只要求知

道所有各根的实数部分是否均为负. 下面介绍霍维茨(Hurwitz)判别代数方程的根的实数部分是否均为负的法则:

定理 4 设给定常系数的 n 次代数方程

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{6.32}$$

其中 $a_0>0$, 作行列式

$$\Delta_1=a_1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\ \cdots,$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_n\Delta_{n-1}$$

其中 $a_i=0$ (对一切 $i>n$).

那么, 方程(6.32)的一切根均有负实数部分的充分必要条件是下列不等式同时成立:

$$a_1>0,\ \Delta_2>0,\ \Delta_3>0,\ \cdots,\ \Delta_{n-1}>0,\ a_n>0$$

这个定理的详细证明见高等代数的课本①, 这里从略.

例 2 考虑三阶非线性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-2x+y-z+x^2e^x \\ \dfrac{dy}{dt}=x-y+x^3y+z^2 \\ \dfrac{dz}{dt}=x+y-z-e^x(y^2+z^2) \end{cases}$$

这里线性近似方程组的特征方程为

---

① 例如 A. Г. 库洛什著, 柯召译《高等代数教程》(人民教育出版社), 或 Ф. Р. 甘特马赫尔著, 柯召译《矩阵论》下册(高等教育出版社).

$$
\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0
$$

或

$$
\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0
$$

由此得

$$
a_0 = 1, \quad a_1 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 17, a_3 = 3
$$

根据定理 4，特征方程所有根均有负实部，由定理 3 知零解 $x = y = z = 0$ 为渐近稳定的.

习 题 6.3

1. 试求出下列方程组的所有奇点，并讨论相应的驻定解的稳定性态：

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1-x-y) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{4} y(2-3x-y) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 9x - 6y + 4xy - 5x^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - 6y - 5xy + 4y^2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \mu(y - x^2), \quad \mu > 0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x^2 - (x-y)\left(y^2 - 2xy + \dfrac{2}{3}x^3\right) \end{cases}$

2. 研究下列方程零解的稳定性：

(1) $\dfrac{d^3x}{dt^3} + 5\dfrac{d^2x}{dt^2} + 6\dfrac{dx}{dt} + x = 0$

(2) $\frac{dx}{dt}=\mu x-y,\ \frac{dy}{dt}=\mu y-z,\ \frac{dz}{dt}=\mu z-x$ (μ 为常数)

(3) $$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x-y+z\\ \frac{dy}{dt}=x-2y+2z\\ \frac{dz}{dt}=x+2y+z\end{cases}$$

3. 某自激振动系统以数学形式表示如下(范得坡方程)①:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0\ (\mu>0)$$

试讨论系统的平衡状态的稳定性态.

§6.4 李雅普诺夫第二方法

前面讨论了数学摆的振动，当摆有阻力时可由其线性近似方程组决定它的稳定性. 但当摆无阻力时，方程组变成

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin x \tag{6.33}$$

属于临界情形，不能按线性近似决定其稳定性态. 由(6.33)可得

$$y\,dy=-\frac{g}{l}\sin x\,dx$$

于是有

$$\frac{1}{2}y^2+\frac{g}{l}(1-\cos x)=c$$

这里 c 为任意非负常数

如果我们取函数

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{g}{l}(1-\cos x)$$

则此函数有性质: $V(0,0)=0$，而在原点邻近对任何不同时为零的 $x,y(|x|<\pi)$ 有

---

① 见§6.5

$$V(x,y)>0$$

现在沿着方程(6.33)的轨线 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 对函数 $V(x,y)$ 取导数

$$\frac{dV(x(t),y(t))}{dt}=V_x(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}+V_y(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}$$

$$=\frac{g}{l}y(t)\sin x(t)+y(t)\left(-\frac{g}{l}\sin x(t)\right)\equiv 0$$

这里 V_x, V_y 表示函数 V 对 x, y 的偏导数. 由 t_0 到 t 积分上式, 得到

$$V(x(t),y(t))=V(x(t_0),y(t_0))$$

这表明相平面上经过曲线 $V(x,y)=V(x(t_0), y(t_0))$ 上的点的轨线将永远沿着此曲线走. 由于 V 的性质, c 足够小时 $V(x,y)=c$ 是围绕原点的一族闭曲线. 因此在没有阻力情况下的数学摆方程组(6.33)的零解是稳定的, 但不是渐近确定的.

这样, 借助构造一个特殊的函数 $V(x,y)$, 并利用函数 $V(x,y)$ 及其通过方程组的全导数 $\frac{dV(x,y)}{dt}$ 的性质来确定方程组解的稳定性, 这就是李雅普诺夫第二方法的思想. 具有此特殊性质的函数 $V(x,y)$ 称为李雅普诺夫函数, 简称 V 函数.

现在讨论如何应用 V 函数来确定非线性微分方程组解的稳定性态问题. 为简单起见, 我们只考虑非线性驻定微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{6.34}$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\\vdots\\f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{bmatrix}$$

假设 $\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在某域 G: $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant A$（$A$ 为正常数）内有连续的偏导数，因而方程组(6.34)的由初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 所确定的解在原点的某个邻域内存在且唯一．显然 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是其特解．

定义 假设 $V(\boldsymbol{x})$ 为在域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H$ 内定义的一个实连续函数，$V(\mathbf{0})=0$．如果在此域内恒有 $V(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，则称函数 V 为**常正**的．如果对一切 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 都有 $V(\boldsymbol{x})>0$，则称函数 V 为**定正**的．如果函数 $-V$ 是定正(或常正)的，则称 V 为**定负(或常负)**的．

进一步假设函数 $V(\boldsymbol{x})$ 关于所有变元的偏导数存在且连续，以方程(6.34)的解代入，然后对 t 求导数

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i$$

这样求得的导数 $\frac{dV}{dt}$ 称为函数 V 通过方程(6.34)的**全导数**．

例 1 函数

$$V(x,y)=(x+y)^2$$

是常正的．而函数

$$V(x,y)=(x+y)^2+y^4$$

是定正的．函数

$$V(x,y)=\sin(x^2+y^2)$$

在域 $x^2+y^2<\pi$ 上定正．在全平面上是变号的．

二次型函数

$$V(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$$

当 $a>0$ 且 $4ac-b^2>0$ 时是定正的；而当 $a<0$ 且 $4ac-b^2>0$ 时是定负的．

定理 5 如果对微分方程组(6.34)可以找到一个定正函数 $V(\boldsymbol{x})$，其通过(6.34)的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 为常负函数或恒等于零，则方程

组(6.34)的零解为稳定的.

如果有定正函数$V(x)$，其通过(6.34)的全导数$\frac{dV}{dt}$为定负的，则方程组(6.34)的零解为渐近稳定的.

如果存在函数$V(x)$和某非负常数μ，而通过(6.34)的全导数$\frac{dV}{dt}$可以表示为

$$\frac{dV}{dt}=\mu V+W(x)$$

且当$\mu=0$时W为定正函数，而当$\mu\neq0$时W为常正函数或恒等于零；又在$x=0$的任意小邻域内都至少存在某个$\bar{x}$，使$V(\bar{x})>0$. 那么，方程组(6.34)的零解是不稳定的.

证明 不妨假设定理中出现的定号函数和常号函数均在域$\|x\|\leqslant H\leqslant A$中有定义. 下面分三部分来证明定理.

稳定性 任给正数$\varepsilon<H$，由$V(x)$的连续性和定正性知，必定存在

$$l=\inf V(x)>0 \qquad 对\varepsilon\leqslant\|x\|\leqslant H$$

又由$V(0)=0$和$V(x)$连续推知存在充分小的$\delta<\varepsilon$，使对$\|x\|\leqslant\delta$有$V(x)<l$.

现在证明，对这样的δ，只要$\|x_0\|\leqslant\delta$，则以x_0为初始向量的解$x(t)$对一切$t\geqslant t_0$满足不等式

$$\|x(t)\|<\varepsilon \tag{6.35}$$

由解对t的连续性，不等式(6.35)至少对某个区间$t_0\leqslant t<T$成立. 因$\varepsilon<H$，由定理条件有

$$\frac{dV(x(t))}{dt}\leqslant0 或 \equiv0$$

积分之，得

$$V(x(t))-V(x_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{dV(x(t))}{dt}dt\leqslant0 或 \equiv0$$

因此当$t_0\leqslant t<T$时有

$$V(x(t))\leqslant V(x_0)<l \tag{6.36}$$

这证明了在解满足不等式(6.35)的任意区间内，式(6.36)均成立.

如果式(6.35)不是对一切$t\geqslant t_0$成立，则当t从t_0逐渐增大时必存在某

一值 t^*, 使 $t_0 \leqslant t < t^*$ 时不等式(6.35)仍成立，但在 $t=t^*$ 有 $\|x(t^*)\|=\varepsilon$, 由于 $\varepsilon<H$, 故式(6.36)在 $t=t^*$ 时仍成立，即

$$V(x(t^*))<l$$

但由 l 的定义，显然

$$\|x(t^*)\|<\varepsilon$$

这与原假设的 $\|x(t^*)\|=\varepsilon$ 矛盾. 故此 t^* 不存在，这就是说，解 $x(t)$ 对一切 $t\geqslant t_0$ 均满足不等式(6.35)，即方程组(6.34)的零解是稳定的.

渐近稳定性　根据刚才的证明，当 $\frac{dV}{dt}$ 定负时，显然零解是稳定的. 现在就取稳定性证明中所确定的 δ 作为 δ_0, 即取 $\delta_0=\delta$, 因而当 $\|x_0\|\leqslant\delta_0$ 时 $\|x(t)\|<H$ 对一切 $t\geqslant t_0$ 成立. 为了证明 $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$, 首先证明

$$\lim_{t\to\infty}V(x(t))=0 \tag{6.37}$$

由于 $\frac{dV(x)}{dt}$ 是定负函数，$V(x(t))$ 对 t 是递减的，故存在极限

$$\lim_{t\to\infty}V(x(t))=c.$$

如果 $c\neq0$, 则对于任何 $t\geqslant t_0$ 有

$$V(x(t))>c$$

又因 $V(x)$ 连续且 $V(\mathbf{0})=0$ 定正，故存在 $\lambda>0$ 使对于任何 $t\geqslant t_0$ 有

$$\|x(t)\|>\lambda$$

如果取

$$m=\sup_{\lambda\leqslant\|x\|\leqslant H}\frac{dV(x)}{dt}$$

由于 $\frac{dV(x)}{dt}$ 为定负的，故 $m<0$, 于是

$$V(x(t))-V(x_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{dV(x(t))}{dt}dt\leqslant m(t-t_0)$$

即

$$V(x(t))\leqslant V(x_0)+m(t-t_0)$$

当 t 不断增大时，上式使函数 $V(x(t))$ 变为负数，这与 $V(x)$ 的定正性矛盾. 因此，必须 $c=0$, 即式(6.37)成立.

现进一步证明由式(6.37)可以推出

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0 \tag{6.38}$$

若上式不成立，则因零解稳定，解 $\boldsymbol{x}(t)$ 是有界的．故存在某一序列$\{t_k\}$($k=1,2\cdots$) $k\to\infty$ 时，$t_k\to\infty$，使

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t_k)\|=\|\boldsymbol{x}^*\|\neq 0$$

于是根据函数 $V(\boldsymbol{x})$ 的定正性，有

$$\lim_{k\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t_k))=V(\boldsymbol{x}^*)\neq 0$$

这与式(6.37)矛盾．这证明式(6.38)成立，故零解是渐近稳定的．

不稳定性　由定理条件，不管 $\delta<H$ 怎样小，总存在 $\boldsymbol{x}_0$ 使 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 且 $V(\boldsymbol{x}_0)>0$．我们证明以 $\boldsymbol{x}_0$ 为初始向量的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 必然走出域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H$ 之外．若不然，则有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant H\quad（当\ t\geqslant t_0\ 时）$$

注意到$\dfrac{dV}{dt}$的表达式及对 W 的假设，当 $\mu\neq 0$ 时有

$$\frac{dV}{dt}-\mu V\geqslant 0\ 或\ \equiv 0$$

两边乘以 $\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}$ 得

$$\frac{d}{dt}(V\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)})\geqslant 0\ 或\ \equiv 0$$

于是得

$$V(\boldsymbol{x}(t))\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}\geqslant V(\boldsymbol{x}_0)$$

即

$$V(\boldsymbol{x}(t))\geqslant V(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{e}^{\mu(t-t_0)}\geqslant V(\boldsymbol{x}_0)>0$$

只要取 t 足够大，则 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 可以任意大．

而当 $\mu=0$ 时，由 W 的定正性有

$$V(\boldsymbol{x}(t))-V(\boldsymbol{x}_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{dV(\boldsymbol{x}(t))}{dt}dt\geqslant 0$$

同样得到

$$V(\boldsymbol{x}(t))\geqslant V(\boldsymbol{x}_0)>0$$

又因 $V(\boldsymbol{x})$ 连续且 $V(\mathbf{0})=0$，所以必存在 $\lambda>0$ 使对任何 $t\geqslant t_0$ 有 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\geqslant\lambda$．由于 $W(\boldsymbol{x})$ 是定正函数，于是存在正数

$$m=\inf_{\lambda\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H}W(\boldsymbol{x})$$

这样一来，便有

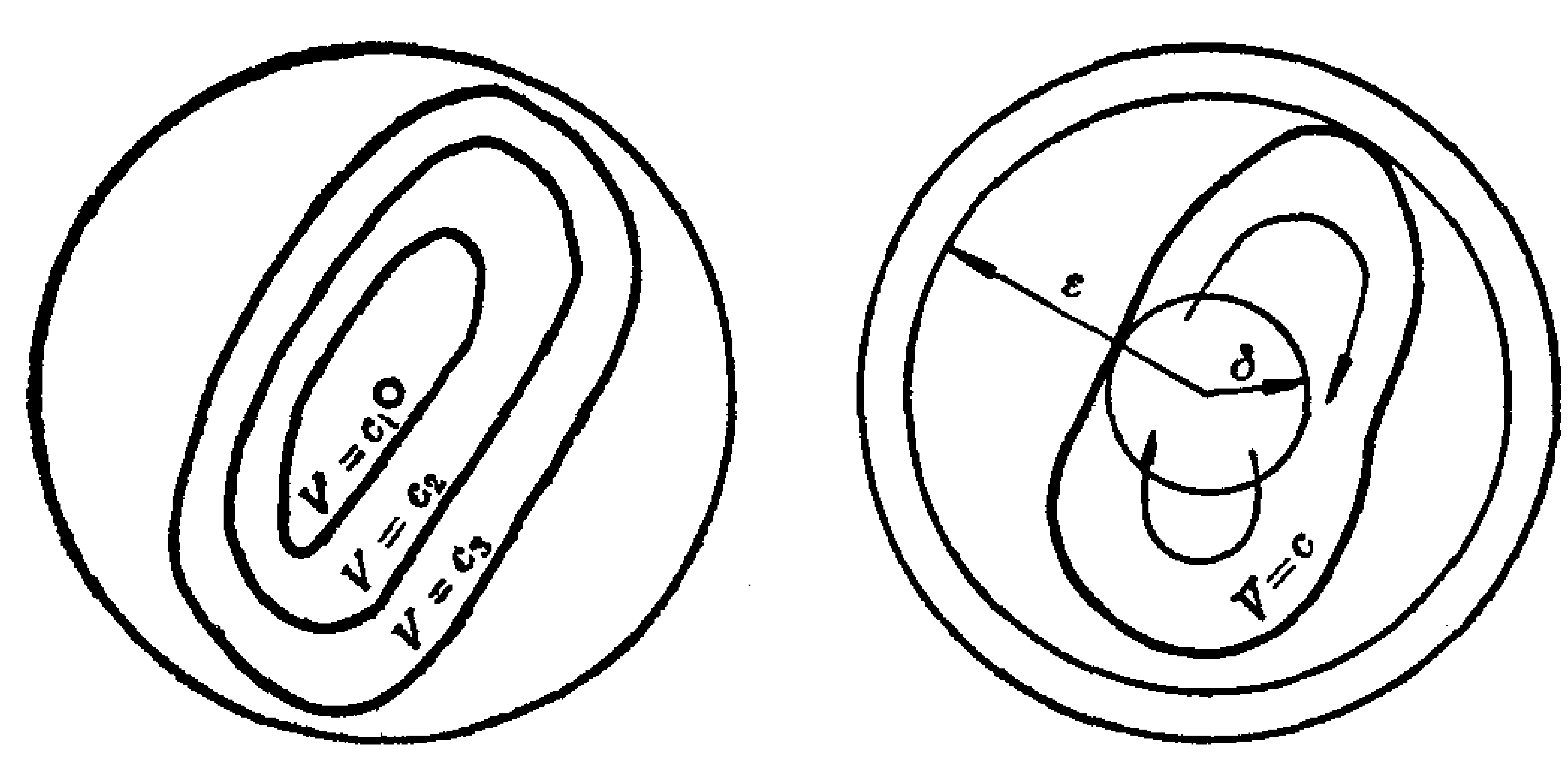
$$V(x(t))-V(x_0)=\int_{t_0}^{t} W(x(t))dt \geq m(t-t_0)$$

同样表明，只要取 t 足够大，则 $V(x(t))$ 可以任意大．这就与 $V(x)$ 于域 $\|x\| \leq H$ 连续，从而有界的结论矛盾．因此，必定存在某个 $t^* > t_0$ 使 $\|x(t^*)\| > H$，故零解是不稳定的．定理证毕．

几何解释　我们以二阶方程组为例，从相平面上轨线与 V 函数的关系来说明稳定性定理的几何意义．作曲线族

$$V(x)=c \qquad (c>0) \tag{6.39}$$

假定 $V(x)$ 为定正函数，即 $V(0)=0$，而当 $x \neq 0$ 时 $V(x)>0$，且 $V(x)$ 是连续的，这时当 c 足够小时，曲线族(6.39)是闭的，并且当 $c_1<c_2$ 时闭曲线 $V=c_1$ 整个包含在闭曲线 $V=c_2$ 之内．如图(6.13a)所示．



(a) $V=c$ 闭曲线族($c_1<c_2<c_3$)　　(b) 稳定性态与 V 函数的关系

图 (6.13) 稳定性几何解释

如果沿着轨线 $x(t)$ 有 $\frac{dV}{dt} \leq 0$，这意味着函数 $V(x(t))$ 对一切 $t \geq t_0$ 是 t 的不增函数．因此，任何轨线 $x(t)$ 将随着 $t \geq t_0$ 增加而一层层地进入闭曲线族(6.39)或者沿着这些曲线(整条曲线或某一段)运动．始终不会由(6.39)的任一闭曲线的内部走到其外部去．

这样一来，对任意给定的正数 $\varepsilon<H$，在域 $\|x\| \leq \varepsilon$ 内作出最大

闭曲线 $V(\boldsymbol{x})=c$, 并在这闭曲线内取以原点为中心的最大内接圆, 其半径记为 δ, 如图(6.13b). 则由域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\delta$ 内任何一点 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的轨线始终要停留在 $V=c$ 之内, 自然更停留在域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\varepsilon$ 的内部, 即 $\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon$. 所以零解是稳定的.

当 $\frac{dV}{dt}$ 为定负的情形, 则只容许轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 自外向内地进入曲线族(6.39)而渐近地趋于原点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 不允许轨线在(6.39)中任一曲线上盘旋, 此时零解是渐近稳定的.

不稳定的情形可类似讨论, 这时轨线将自内而外地离开曲线族(6.39)而走出域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H$ 之外.

例 2 考虑二阶微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=-y+ax^3,\quad \frac{dy}{dt}=x+ay^3$$

这里其线性近似方程组的特征根为 $\lambda=\pm\sqrt{-1}$, 属于临界情形.

如取定正函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, 这时

$$\frac{dV}{dt}=\alpha(x^4+y^4)$$

根据定理 5, 依 α 的不同情况可得如下结论:

(1) 如果 $\alpha<0$, 则 $\frac{dV}{dt}$ 定负, 方程组的零解为渐近稳定;

(2) 如果 $\alpha>0$, 则 $\frac{dV}{dt}$ 定正, 方程组的零解为不稳定;

(3) 如果 $\alpha=0$, 则 $\frac{dV}{dt}\equiv 0$, 方程组的零解稳定.

定理 5 是李雅普诺夫稳定性的基本定理, 对含有时间 t 的非驻定的微分方程组及含有时间 t 的 V 函数 $V(t;\boldsymbol{x})$ 也有相应的定理, 其证明方法仍然一样. 但其条件及函数 $V(t;\boldsymbol{x})$ 的有关定义必须作一些改变, 如 $V(t;\boldsymbol{x})$ 定正的含义是存在定正函数 $W(\boldsymbol{x})$

使 $V(t;x)\geqslant W(x)$. 详细讨论可参看许淞庆编著《常微分方程稳定性理论》(上海科学技术出版社).

此外，经过不断发展，可以在更广泛的条件下得到关于稳定性、渐近稳定性和不稳定性的结论. 下面我们仅举出一个应用较广的关于渐近稳定性的判断.

定理 6 如果存在定正函数 $V(\boldsymbol{x})$, 其通过方程组(6.34)的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 为常负，但使 $\frac{dV(\boldsymbol{x})}{dt}=0$ 的点 $\boldsymbol{x}$ 的集中除零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 之外并不包含方程组(6.34)的整条正半轨线，则方程组(6.34)的零解是渐近稳定的.

定理 6 的证明与定理 5 的类似, 由于定理条件，对轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 不会有 $\frac{dV(\boldsymbol{x}(t))}{dt}\equiv 0$, 故仍可以通过反证法证明 $\lim\limits_{t\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t))=0$, 即有 $\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=0$. 从几何意义上看, 虽然 $\frac{dV(\boldsymbol{x})}{dt}$ 常负，但因使 $\frac{dV(\boldsymbol{x})}{dt}=0$ 的集中除零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 之外不含有整条正半轨线, 故轨线不会永远停留在某一闭曲线 $V=c$ 上，它必然自外向内地逐层进入曲线族(6.39)而趋近原点.

例 3 现在让我们回到前面讨论过的数学摆的稳定性问题上. 在 § 6.3 的例 1 中曾经指出，其一般的微分方程(6.29)可化为方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin x-\frac{\mu}{m}y \tag{6.30}$$

如果取 V 函数为

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{g}{l}(1-\cos x)$$

则其全导数为

$$\frac{dV(x,y)}{dt}=-\frac{\mu}{m}y^2$$

当无阻力时，$\mu=0$，因而 $\frac{dV}{dt}=0$，根据定理5，方程组(6.30)的零解是稳定的．这正如本节开头所讨论的．

当有阻力时，$\mu>0$，因而 $\frac{dV}{dt}$ 为常负，如果根据定理 5 仅能得到稳定的结论．但由于使 $\frac{dV}{dt}=0$ 的集是 $y=0$，而在原点邻域中 $y=0$ 直线上除零解 $x=0, y=0$ 之外不含有方程组(6.30)的整条正半轨线，故可应用定理 6，而得到(6.30)的零解为渐近稳定的结论．这与 § 6.3 的例 1 中通过线性近似详细分析得到的结论是一样的．

习 题 6.4

1. 试判别下列函数的定号性：

(1) $V(x, y)=x^2$

(2) $V(x, y)=x^2-2xy^2$

(3) $V(x, y)=x^2-2xy^2+y^4+x^4$

(4) $V(x, y)=x^2+2xy+y^2+x^2y^2$

(5) $V(x, y)=x\cos x+y\sin y$

2. 试用形如 $V(x, y)=ax^2+by^2$ 的李雅普诺夫函数确定下列方程组零解的稳定性：

(1) $\frac{dx}{dt}=-xy^2,\ \frac{dy}{dt}=-yx^2$

(2) $\frac{dx}{dt}=-x+xy^2,\quad \frac{dy}{dt}=-2x^2y-y^3$

(3) $\frac{dx}{dt}=-x+2y^3,\quad \frac{dy}{dt}=-2xy^2$

(4) $\frac{dx}{dt}=x^3-2y^3,\ \frac{dy}{dt}=xy^2+x^2y+\frac{1}{2}y^3$

3. 研究下列方程组零解的稳定性：

(1) $\frac{dx}{dt}=-x-y+(x-y)(x^2+y^2),\ \frac{dy}{dt}=x-y+(x+y)(x^2+y^2)$

(2) $\frac{dx}{dt}=-y^2+x(x^2+y^2)$, $\frac{dy}{dt}=-x^2-y^2(x^2-y^2)$

(3) $\frac{dx}{dt}=-xy^6$, $\frac{dy}{dt}=y^3x^4$

(4) $\frac{dx}{dt}=ax-xy^2$, $\frac{dy}{dt}=2x^4y$　　(a 为参数)

(5) $\frac{dx}{dt}=ax-y^2$, $\frac{dy}{dt}=2x^3y$ (a 为参数)

4. 给定微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=y-xf(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=-x-yf(x,y)$$

其中 $f(x,y)$ 有连续一阶偏导数. 试证明在原点邻域内如 $f>0$ 则零解为渐近稳定的, 而 $f<0$ 则零解不稳定.

5. 给定方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0$$

其中 $f(0)=0$, 而当 $x\neq 0$ 时 $xf(x)>0(-k<x<k)$. 试将其化为二阶方程组, 并用形如

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x f(s)ds$$

的李雅普诺夫函数讨论方程组零解的稳定性.

6. 方程组

$$\frac{dx}{dt}=y-x^3, \quad \frac{dy}{dt}=-2(x^3+y^5)$$

能否由线性近似方程决定其稳定性问题? 试寻求李雅普诺夫函数以解决这方程组的零解的稳定性问题, 同时变动高次项使新方程的零解为不稳定的.

§6.5　周期解和极限圈

对于二阶常系数线性微分方程组, 在 §6.2中已作了详细的讨论, 除了在中心型奇点邻域内轨线是一族围绕原点的闭曲线(对应于方程的周期解)外, 其余的情形均是一端趋于奇点($t\to+\infty$或$t\to-\infty$), 另一端趋于无穷远($t\to-\infty$ 或 $t\to+\infty$)或两端都趋于无穷远的轨线, 不存在其他的复杂情形. 对于非线性微分方程组,

我们仅在§6.3中利用近似线性方程组讨论了奇点邻域的轨线性态，至于全相平面的轨线图貌，情况就复杂多了。

例1 对二阶非线性驻定方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y-x(x^2+y^2)\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y-y(x^2+y^2)\end{cases}\tag{6.40}$$

如取极坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$，则方程组(6.40)可化为

$$\frac{dr}{dt}=r(1-r^2),\quad \frac{d\theta}{dt}=-1\tag{6.41}$$

由(6.41)可知当 $r=0$ 和 $r=1$ 时 $\dfrac{dr}{dt}=0$，而 $\dfrac{d\theta}{dt}=-1$，即有两个特解：

$$r=0,\quad \theta=t_0-t,\qquad t\geqslant t_0$$

及

$$r=1,\quad \theta=t_0-t,\qquad t\geqslant t_0$$

第一个解即为原点，是一奇点(易知它是不稳定焦点)．而第二个解在相平面上是半径等于1以原点为圆心的一个圆．这个以圆为轨线的解是一个周期解，周期为 2π，轨线是沿着顺时针方向旋转的．

我们来看看除了前面的两个特解外，其余轨线的性态如何．在相平面上任意作一个半径为 $R>0$（圆心在原点)的圆，考虑通过 $r=R$ 圆上的任一点 (R,θ^*) 方程轨线的走向．

当 $R=R_1<1$ 时，由式(6.41)有

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=R_1}=R_1(1-R_1^2)>0,\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=\theta^*}=-1<0$$

即轨线按顺时针方向从圆 $r=R_1$ 上走出圆外．

当 $R=R_2>1$ 时，则由(6.41)有

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=R_2}=R_2(1-R_2^2)<0,\qquad \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=\theta^*}=-1<0$$

即轨线按顺时针方向从圆 $r=R_2$ 上走进圆内.

考虑由 $R_1<r<R_2$ 组成的环域 D. 首先，由方程组(6.41)的右端可知，此环域D内没有方程的奇点. 其次，从前面的讨论知道，在边界$r=R_1$ 和 $r=R_2$ 上所有的轨线均从环域D外进入D内，并不再走出环域 D，如图(6.14)所示.

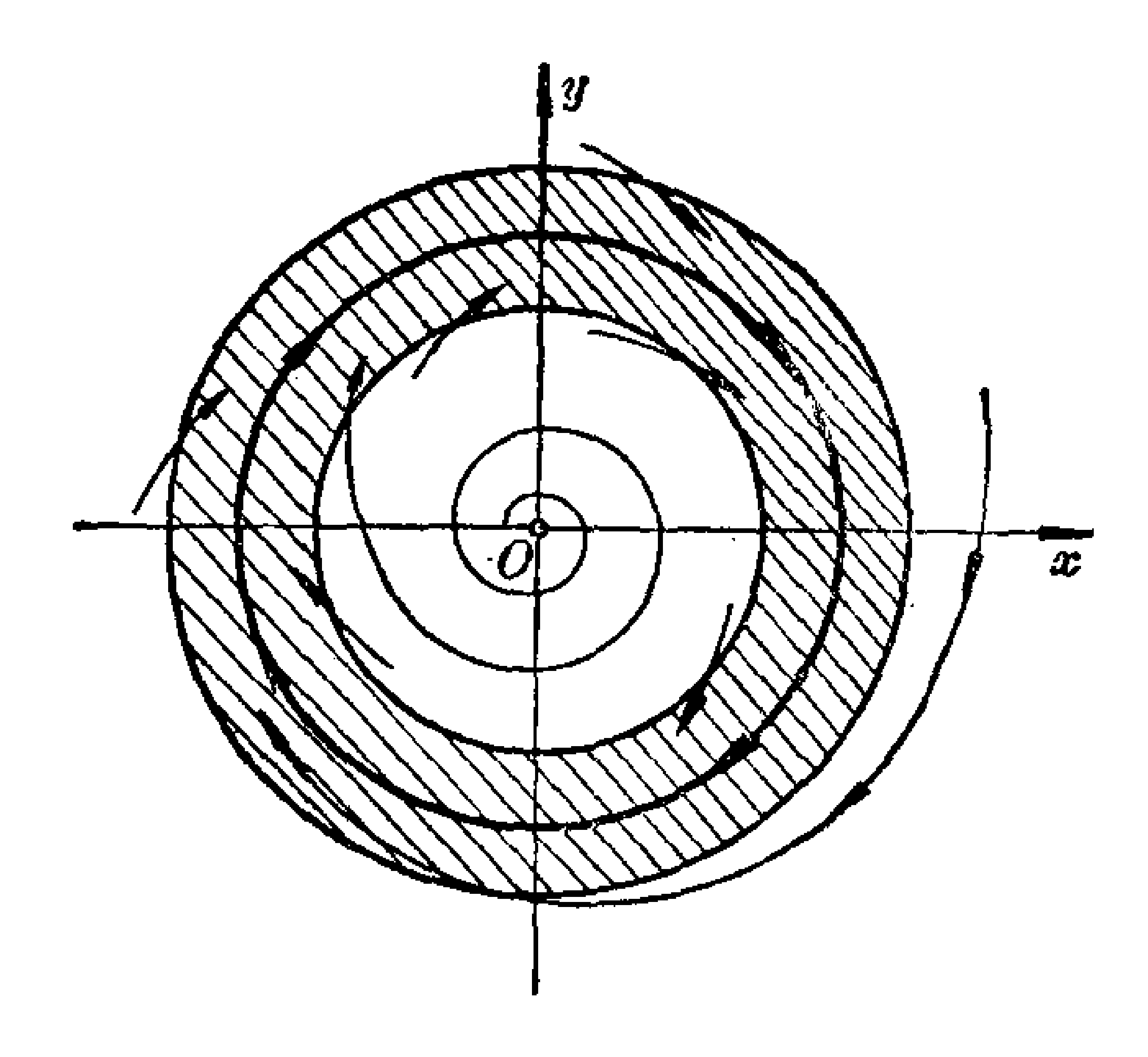
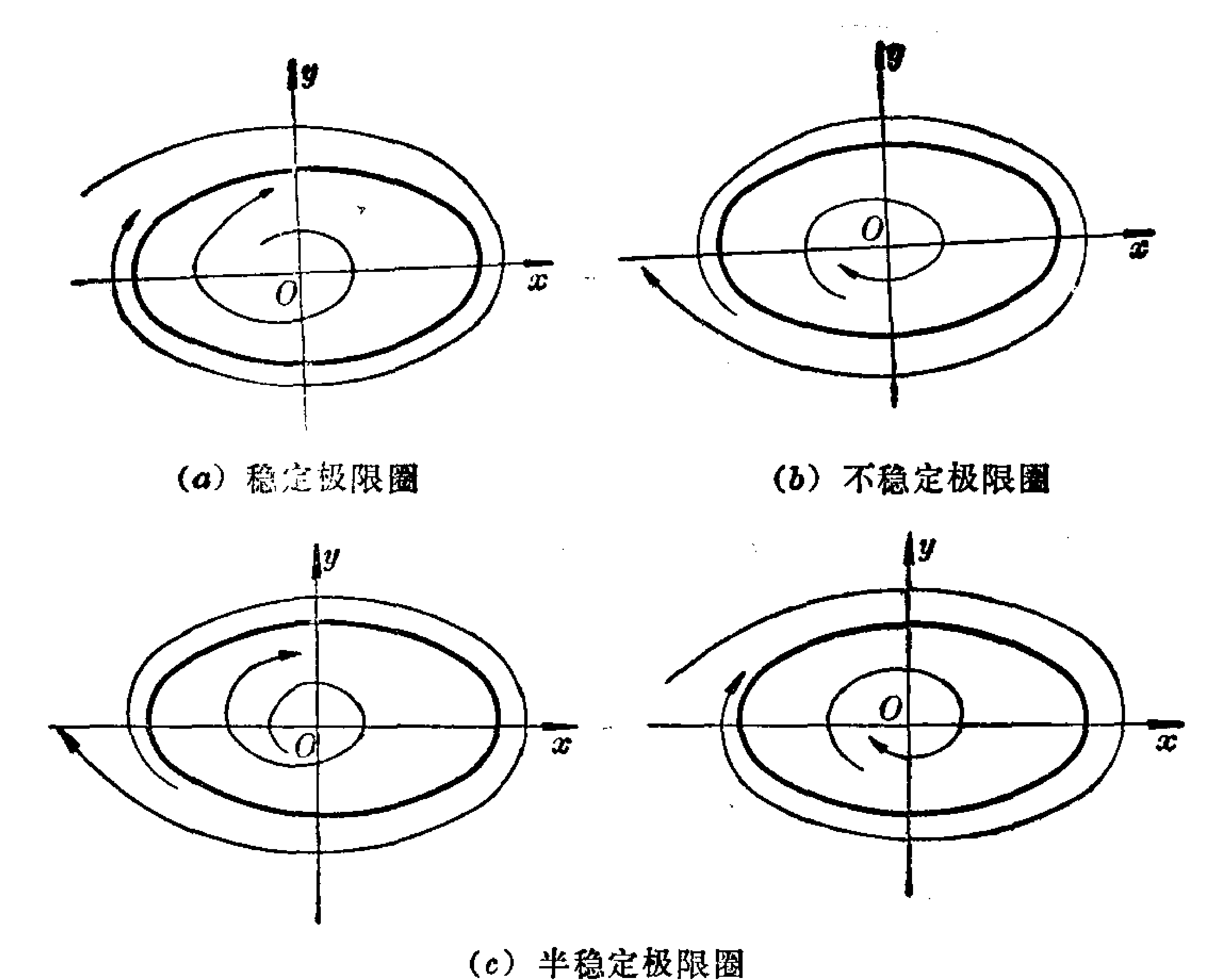


图 (6.14) 极限圈与环域 D

如果取 R_1, R_2均足够接近 1，但仍有 $R_1<1<R_2$，则环域D的上述性质仍不变. 这就证明了圆 $r=1$ 所表示的特解是一个周期解(对应于闭轨线)，其余的解(轨线)均趋近于此周期解(闭轨线).

这种孤立的周期解(闭轨线)，在相平面上我们称为**极限圈**. 当极限圈附近的轨线均正向(即 $t\to+\infty$ 时)趋近于它时，称此极限圈为**稳定的**. 如果轨线是负向(即 $t\to-\infty$)趋近此极限圈，则称它为**不稳定的**. 当此极限圈的一侧轨线正向趋近于它，而另一侧轨线负向趋近于它时，此极限圈称为**半稳定的**. 稳定、不稳定和半稳定极限圈的相图见图(6.15).

上例方程组(6.40)的解 $r=1$ 便是一个稳定的极限圈(参看



(a) 稳定极限圈　　(b) 不稳定极限圈

(c) 半稳定极限圈

图 (6.15) 极限圈的稳定性态

图(6.14))。

实际上可以不必先求出特解(如上例的 $r=1$)，而仅仅由构造出的环域D便可以证明在此环域内必存在极限圈. 这种构造特殊环域来寻求极限圈的方法称为**班狄克生(Bendixson)方法**，它是根据下面的定理得出的.

假设二阶驻定微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=X(x,y),\qquad \frac{dy}{dt}=Y(x,y) \tag{6.42}$$

其右端函数 X、Y 在相平面的某域G内有一阶连续偏导数.

定理 7 如果G内存在有界的环形闭域D，在其内不含有方程组(6.42)的奇点，而(6.42)的经过域D上点的解 $x=x(t)$，$y=y(t)$当 $t\geqslant t_0$(或 $t\leqslant t_0$)时不离开该域，则或者其本身是一个周期解(闭轨线)，或者它按正向(或负向)趋近于D内的某一周期解(闭

轨线).

因此，只要能构造出一个有界的环形闭域 D，在其上没有奇点，且在其边界上轨线均进入(或离开)该域. 自然，进入(或离开)域 D 的解均不会再离开(或进入)域 D，则应用定理 7 可以肯定在域 D 内必存在周期解(闭轨线). 如果这周期解(闭轨线)是孤立的，那么它就是极限圈. 这样，可以通过构造特殊的环域来寻求极限圈，并大致确定其位置. 如果环域越狭小，则极限圈的位置越准确. 例如上述例子中的环域 D，若取 R_1, R_2 足够接近 1，便可以确定极限圈为圆 $r=1$ 而不必先寻求此特解.

通过构造有特殊性质的域 D 可以确定周期解(极限圈)的存在，自然也提出这样的问题：能否通过构造具有别的特殊性质的域 D^* 来否定周期解(极限圈)的存在呢？下面给出一个判别准则.

定理 8 如果于 G 内存在单连通域 D^*，在其内函数 $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}$ 不变号且在 D^* 内的任何子域上不恒等于零，则方程组(6.42)在域 D^* 内不存在任何周期解，更不存在任何极限圈.

现在用反证法利用格林(Green)公式来证明定理. 假设 D^* 内存在某周期为 T 的周期解:

$$\Gamma: x=x(t),\quad y=y(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T$$

则对于由 Γ 所围成的域 D_Γ (显然 $D_\Gamma\subset D^*$)有

$$\iint\limits_{D_\Gamma}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_\Gamma(X\,dy-Y\,dx)$$

$$=\int_0^T\left(X\frac{dy}{dt}-Y\frac{dx}{dt}\right)dt=\int_0^T(XY-YX)\,dt=0$$

这与定理的假设矛盾，故在域 D^* 内不存在任何周期解更不存在任何极限圈.

例 2 考虑 §6.3 例 1 讨论过的数学摆，其微分方程(6.29)

可化为二阶方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin x-\frac{\mu}{m}y \qquad (\mu>0) \tag{6.30}$$

我们有

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=-\frac{\mu}{m}<0$$

于是应用定理 8 即可肯定方程组(6.30)不存在周期解.

由于稳定的极限圈对应于物理上的周期振动情形，而不稳定的极限圈则对应于物理上不能实现的周期振动，因此，对某类型方程讨论如何确定极限圈及其稳定性态的问题是有其实际意义的.

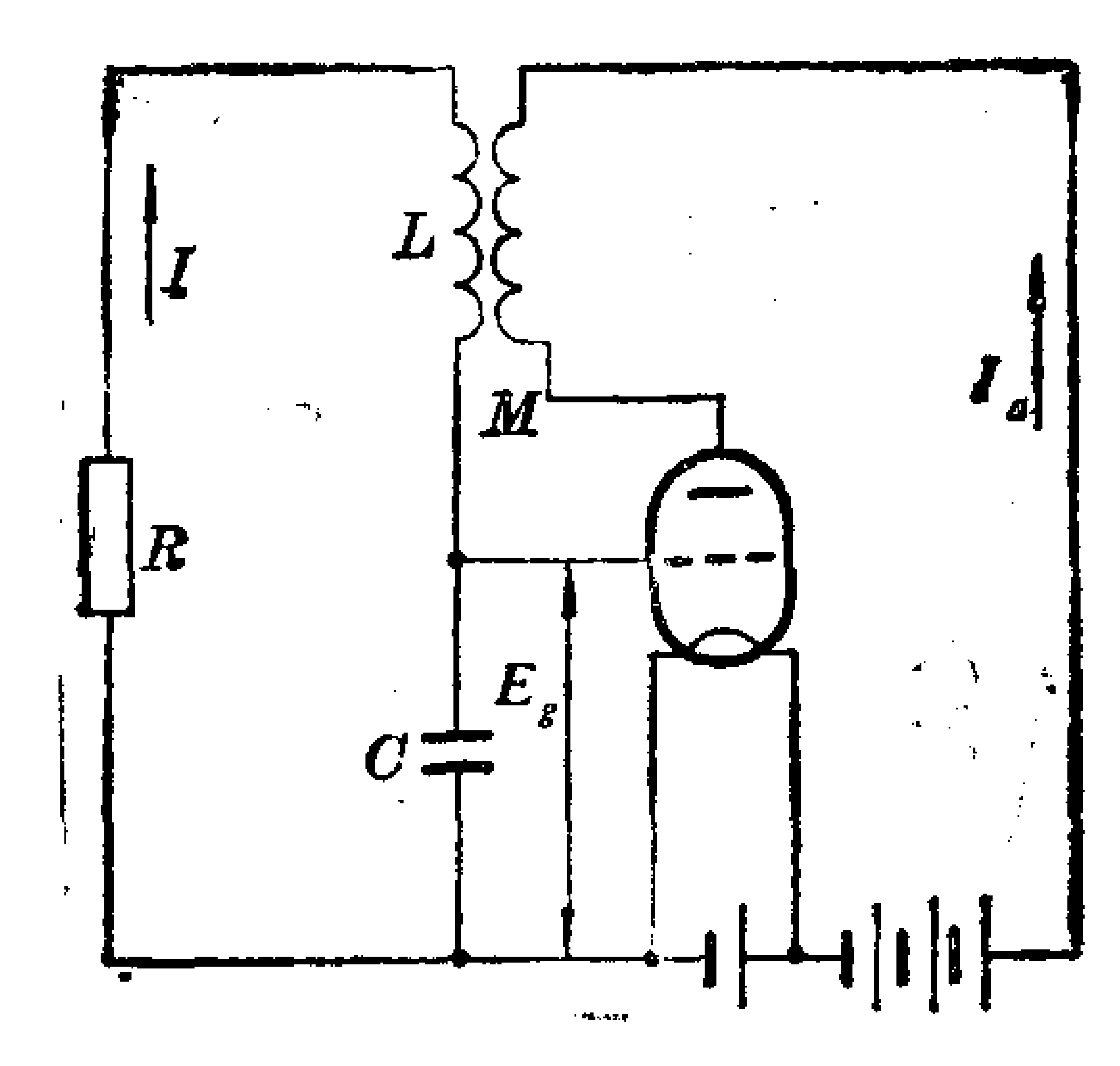


图 (6.16) 振动电路

在第一章§1.1例 3 中推导了 R-L-C 振动电路方程

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=0$$

并在§4.2及§6.2的习题中求出了通解，分析了其线性方程组的奇点类型. 当 $R>0$ 时由于电阻消耗电能变成了热能，所以方程的解是阻尼衰减的. 在无线电技术中需要得到等幅振动，这就必须从外部补充能量来维持其振动过程，其中一个典型方案如图(6.16)所示.

图中电子管的阳极回路电流 I_a 通过电感耦合补充 R-L-C 回路以能量. 假设互感量为 M，在 R-L-C 回路中，如果略去很小的电子管栅极电流不计，则可以写出回路方程

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int Idt-M\frac{dI_a}{dt}=0$$

电子管的特性中，阳极电流 I_a 和栅极电势 E_g 之间的关系可以近似表为

$$I_a=\sigma\left(E_g-\frac{E_g^3}{3E_s^2}\right)$$

其中 σ 是跨导，E_s 为对应于阳极饱和电流的栅极电势，均为电子管的特性参数（常量）.

如果令 $z=\frac{E_g}{E_s}$，并利用电路中栅极电势和电容 C 的关系式

$$E_g=\frac{1}{C}\int Idt$$

电路方程便可以化为

$$LC\frac{d^2z}{dt^2}+(RC-\sigma M)\frac{dz}{dt}+\frac{\sigma M}{3}\frac{dz^3}{dt}+z=0$$

进一步引入变量

$$x=z\left(\frac{\sigma M}{\sigma M-RC}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \tau=\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

最后得到

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{d\tau}+x=0 \qquad (6.43)$$

这里 $\mu=\frac{\sigma M-RC}{\sqrt{LC}}$，只要互感量 M 足够大，使 $\sigma M>RC$，则能量可以得到足够的补充，此时有 $\mu>0$.

图(6.16)表示的电子管电路存在一个孤立的稳定的等幅振动，它在无线电技术中有着很重要的意义．物理学家范得坡(Van der Pol)首先推导出方程(6.43)，并从数学上严格论证了实验所得的结论．一般称方程(6.43)为**范得坡方程**.

我们考虑更广泛的所谓李安纳特(Liénerd)方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=0 \qquad (6.44)$$

如果记 $F(x)=\int_0^x f(x)dx$，并设 $y=\frac{dx}{dt}+F(x)$，则方程(6.44)可化为二阶方程组

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\quad \frac{dy}{dt}=-g(x) \tag{6.45}$$

对于方程(6.44)或方程组(6.45),我们有下面的定理:

定理 9 假设

(1) $f(x)$及$g(x)$对一切x连续, $g(x)$满足局部利普希茨条件;

(2) $f(x)$为偶函数, $f(0)<0$, $g(x)$为奇函数, 当$x\neq0$时$xg(x)>0$;

(3) 当$x\to\pm\infty$时$F(x)\to\pm\infty$; $F(x)$有唯一正零点$x=a$, 且对$x\geqslant a$, $F(x)$是单调增加的.

那么,方程(6.44)有唯一周期解,即方程组(6.45)有一个稳定的极限圈.

在定理 9 的条件下,原点是唯一奇点,且相平面上轨线对于原点是对称的. 于是, 定理 9 的一个证明方法是想办法构造一个环域 D, 如图(6.17), 使经过其边界上的点的轨线只能进入此环域 D

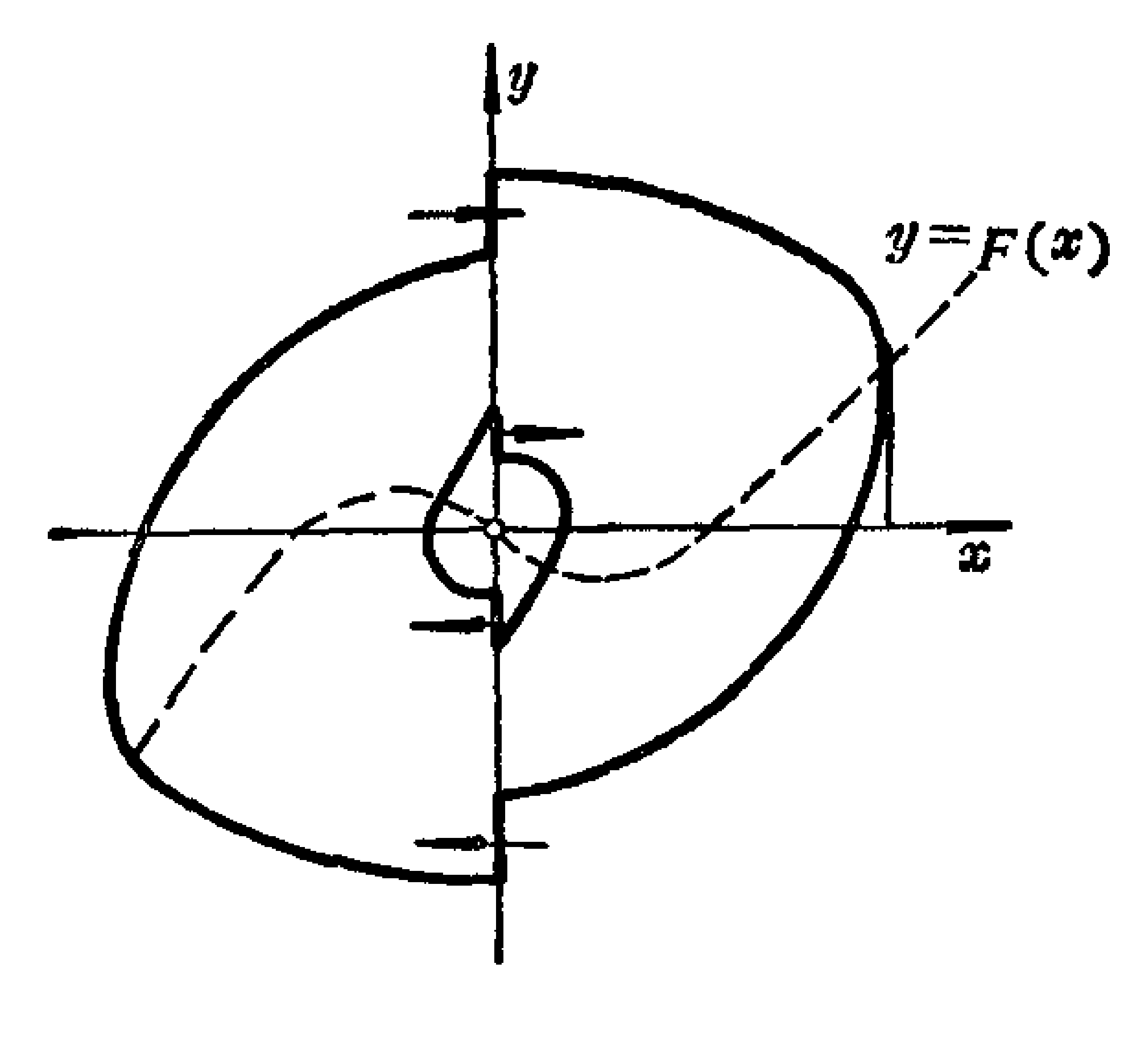


图 (6.17)

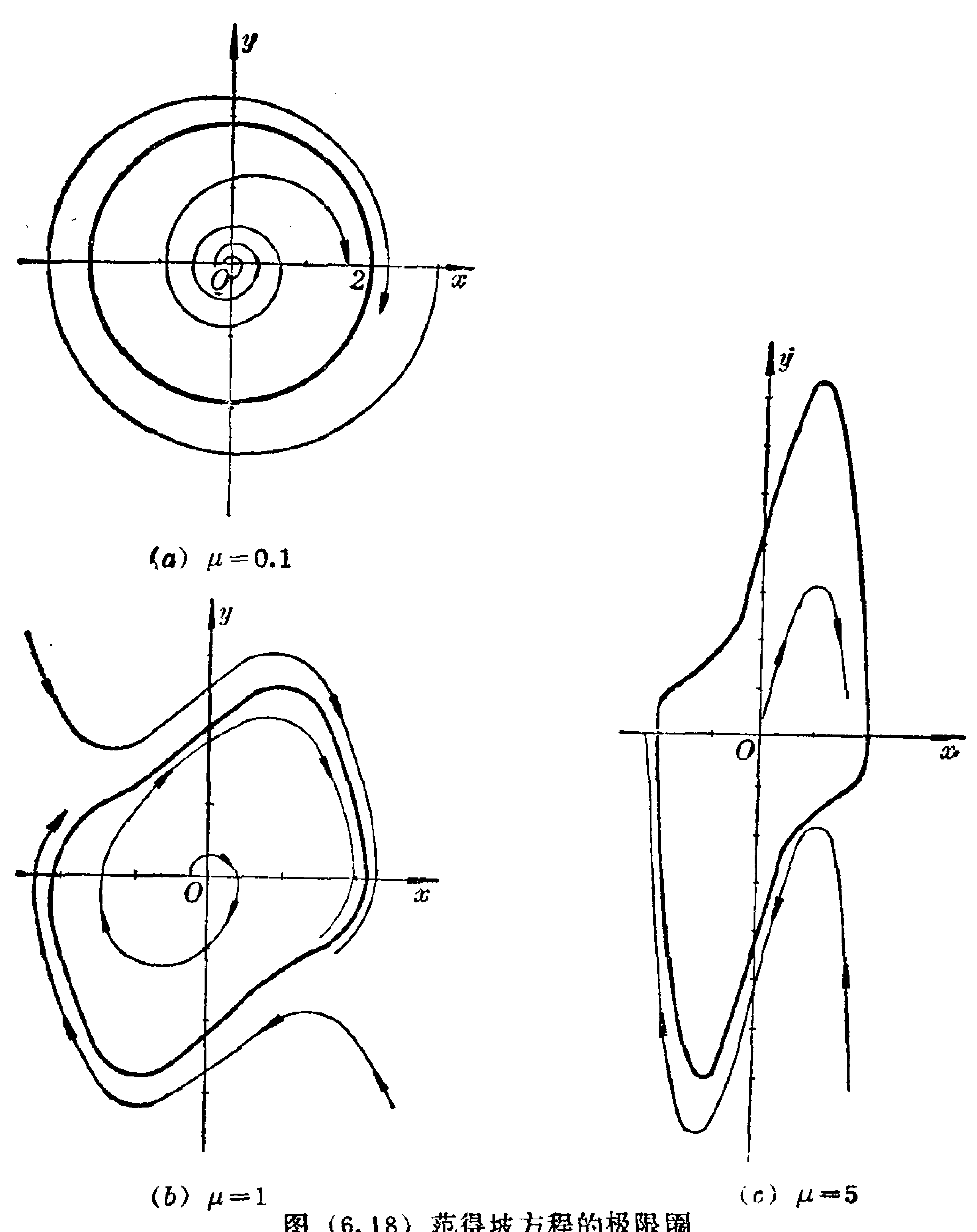
内, 并且不再越出域外. 这样利用定理 7 证明了存在一条闭轨线(周期解),再进一步证明此闭轨线是唯一的,便得到存在唯一极限圈的结论. 整个证明较为复杂,不在此详细介绍了.(可参阅 S·莱

夫谢茨著，许淞庆译，《微分方程几何理论》，上海科学技术出版社）

由于范得坡方程(6.43)满足定理 9 的条件，故方程(6.43)或其等价的方程组

$$\frac{dx}{dt}=y-\mu\left(\frac{x^3}{3}-x\right) \qquad \frac{dy}{dt}=-x$$

存在稳定的极限圈．当 μ 很小时极限圈接近于半径为 2 的圆，而当 μ 很大时，则极限圈被“压扁”成一长条形，参看图(6.18)．



图（6.18）范得坡方程的极限圈

习　题　6.5

1. 试确定下列方程组的周期解、极限圈，并讨论极限圈的稳定性：

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-x(x^2+y^2-1)^2\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x-y(x^2+y^2-1)^2\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-1)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-x-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-1)\end{cases}$　　当 $x^2+y^2\neq 0$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dy}{dt}=0$　　当 $x^2+y^2=0$

(3) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-4)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-4)\end{cases}$

2. 试判别下列方程组有无极限圈存在：

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y+\dfrac{1}{3}x^3-y^2x\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-x+y+yx^2+\dfrac{2}{3}y^3\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x+y-2xy^2\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=y+x^3-x^2y\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-x+x^3\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-x-y+y^3\end{cases}$

3. 考虑方程组

$$\frac{dx}{dt}=X(x,y),\ \frac{dy}{dt}=Y(x,y)$$

其中函数 $X(x,y)$，$Y(x,y)$ 在单连通区域 D 内有连续偏导数．假设存在函数 $B(x,y)$，其一阶偏导数于域 D 内连续，且

$$\frac{\partial}{\partial x}(BX)+\frac{\partial}{\partial y}(BY)$$

不变号和不恒等于零. 试证明上述方程组于域D内不存在任何周期解.

4. 证明方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+ax+b\frac{dx}{dt}-\alpha x^2-\beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0$$

没有极限圈存在, 其中 a、b、α, β 为常数, 且 $b\neq0$. (提示: 利用上题结果).

5. 证明下列方程(组)存在唯一的稳定极限圈:

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y-x^5-3x^2y\end{cases}$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\alpha(x^{2n}-\beta)\dfrac{dx}{dt}+\gamma x^{2m-1}=0$

(α、β、γ 为正常数, n, m 为正整数)

§6.6 二次型V函数的构造与控制系统的绝对稳定性

从前面的讨论中知道, 借助李雅普诺夫方法可以直接判断微分方程的解的稳定性态, 但如何构造满足特定性质的V函数则是一个有趣而复杂的问题. 在这一节, 我们将首先解决对线性微分方程组构造二次型V函数的问题, 并利用它来补充证明按线性近似决定稳定性的定理 3. 然后讨论用以描述一类控制系统的线性微分方程的全局稳定性.

定理 10 如果 n 阶线性微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{6.46}$$

的特征根 λ_i 均不满足关系 $\lambda_i+\lambda_j=0(i, j=1, 2, \cdots, n)$, 则对任何定负(或定正)的对称矩阵 $\boldsymbol{C}$, 均有唯一的二次型

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}) \tag{6.47}$$

使其通过方程组(6.46)的全导数有

$$\frac{dV}{dt}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{C})\tag{6.48}$$

且对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\tag{6.49}$$

这里 $\boldsymbol{A}^T,\boldsymbol{B}^T,\boldsymbol{C}^T,\boldsymbol{x}^T$ 分别表 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{x}$ 的转置.

如果方程组(6.46)的特征根均具负实部，则二次型(6.47)是定正(或定负)的；如果(6.46)有正实部的特征根，则二次型(6.47)不是常正(或常负)的.

证明 我们首先证明对称矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 之间的关系式(6.49). 由(6.47)和(6.46)有

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d\boldsymbol{x}^T}{dt}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$$

与式(6.48)相比较便得到关系式(6.49).

注意到对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 只有$\frac{1}{2}n(n+1)$个未知元素和矩阵 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{C}$ 的对称性，矩阵方程(6.49)可以展开成$\frac{1}{2}n(n+1)$个未知数的$\frac{1}{2}n(n+1)$个方程的线性代数方程组.

下面我们证明这样的方程组的解是存在且唯一的，即满足关系式(6.49)的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可以唯一确定. 于是，如果 $\boldsymbol{C}$ 是实矩阵，则唯一确定的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 也是实的.

由定理条件，显然 $\lambda_i\neq0(i=1,2,\cdots,n)$. 根据线性代数方程组理论，存在这样的非奇异线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{y}$，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为标准形

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}\lambda_1 & d_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \ddots & \vdots\\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & d_n\\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

这里 $d_i=0$ 或 1.

我们用变换矩阵 U 及其转置矩阵 U^T 分别右乘及左乘(6.49)的两边，并利用关系式 $(U^{-1})^TU^T=(UU^{-1})^T=E$ 就得到

$$U^TA^T(U^{-1})^TU^TBU+U^TBUU^{-1}AU=U^TCU$$

记 $C^*=U^TCU$, $B^*=U^TBU$, 则上式可以化成

$$(A^*)^TB^*+B^*A^*=C^* \tag{6.50}$$

由于标准形矩阵 A^* 的特性, 显然展开上式可以得到

$$(\lambda_1+\lambda_j)b_{1j}^*+d_jb_{1,j-1}^*=c_{1j}^* \ (j=1,2,\cdots,n)$$

$$(\lambda_i+\lambda_j)b_{ij}^*+d_ib_{i-1,j}^*+d_jb_{i,j-1}^*=c_{ij}^* \ (i=2,\cdots,n;\ j=1,2\cdots,n)$$

这里记 $d_1=b_{i0}^*=0$, 且 b_{ij}^*、c_{ij}^* $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 分别为 B^*、C^* 的元素. 依照定理条件 $\lambda_i+\lambda_j\neq 0$, 我们可以逐个求解 b_{ij}^*:

$$b_{1j}^*=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_j}(c_{1j}^*-d_jb_{1,j-1}^*) \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

$$b_{ij}^*=\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}(c_{ij}^*-d_ib_{i-1,j}^*-d_jb_{i,j-1}^*)$$

$$(i=2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$$

解出了矩阵 B^* 后便可以确定 $B=(U^{-1})^TB^*U^{-1}$. 由于变换 U 是非奇异的, 所以当 $C=0$ 时可以推得 $C^*=0$. 依照定理条件 $\lambda_i+\lambda_j\neq 0$, 根据前面对方程组(6.50)的逐步求解式知道 $B^*=0$, 因此 $B=0$. 这说明了对于关系式(6.49), 当 $C=0$ 时有 $B=0$. 利用这一性质容易证明满足关系式(6.49)的矩阵 B 是唯一的. 事实上, 假设存在两个矩阵 B_1 和 B_2 同时满足(6.49), 则令 $B=B_1-B_2$, 显然由(6.49)得 $A^TB+BA=0$, 即 B 满足 $C=0$ 时关系式(6.49), 于是 $B=0$, 即 $B_1=B_2$, 所以满足关系式(6.49)的矩阵 B 是唯一的. 这就证明了定理的前半部分.

现在进一步证明当 A 的特征值均具负实部时, 二次型(6.47)是定正的. 如果此结论不成立, 则在原点邻域有 $x_0\neq 0$ 使 $V(x_0)\leqslant 0$. 考虑以此 x_0 为初始向量的方程组(6.46)的解 $x(t)$, 由于二次型(6.48)是定负的, 沿着此解有

$$\frac{dV(x(t))}{dt}=x^T(t)Cx(t)<0$$

由此推得

$$V(x(t))<V(x(t_1))<V(x_0)\leqslant 0, \quad t>t_1>t_0$$

另一方面, 由于矩阵 A 的特征值的具负实部, 根据第五章的定理 11, 当 t 无限增大时解 $x(t)$ 应趋于 0, 因而

$$\lim_{t \to +\infty} V(\boldsymbol{x}(t)) = 0$$

这与上面不等式相矛盾．这就证明了二次型(6.47)必须是定正的．

同样，当 $\boldsymbol{A}$ 有正实部的特征值时，二次型(6.47)必须不是常正的．假设(6.47)为常正，我们证明它将导致矛盾的结论．如果有 $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$，使 $V(\boldsymbol{x}_0)=0$，则由于 $\frac{dV}{dt}$ 定负，以 $\boldsymbol{x}_0$ 为初始向量的(6.46)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 将使 $\frac{dV(\boldsymbol{x}(t))}{dt}<0$，因而 $V(\boldsymbol{x}(t))<0$(当 $t>t_0$)，这与 $V(\boldsymbol{x})$ 为常正的假设矛盾，故实际上 $V(\boldsymbol{x})$ 必须为定正函数．但原来已知 $\frac{dV}{dt}$ 为定负，故由定理 5，可以确定方程组(6.46)的零解是渐近稳定的，这又与 $\boldsymbol{A}$ 有正实部的特征值，因而线性方程组(6.46)的零解将为不稳定的结论相矛盾．这就证明了二次型(6.47)不是常正的．定理 10 证毕．

例 1 考虑在§6.2中讨论过的二阶线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0$$

或经过变换 $\frac{dx}{dt}=y$，化为二阶线性方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=-2x-3y \end{cases}$$

其特征根为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$．满足条件 $\lambda_1+\lambda_2\neq 0, \lambda_1、\lambda_2\neq 0$:

依据定理 10，对定负对称矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$．可以通过关系式(6.49)确定出二次型

$$V(x,y)=[x \quad y]\begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_3 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

事实上，将矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_3 & b_2 \end{bmatrix}$ 代入关系式(6.49)，展开得三阶线性代数方程组

$$\begin{cases} -4b_3=-4 \\ b_1-2b_2-3b_3=0 \\ -6b_2+2b_3=-1 \end{cases}$$

解此方程组得到

$$b_3=1, \quad b_2=\frac{1}{2}, \quad b_1=4$$

这样我们就求得了二次型 V 函数

$$V(x,y)=\frac{1}{2}(8x^2+4xy+y^2)$$

容易验证,此二次型是定正的,且其通过线性方程组的全导数有

$$\frac{dV(x,y)}{dt}=-(4x^2+y^2)=[x \quad y]\begin{bmatrix}-4 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}$$

这与定理 10 的结论相符.

定理 3 的证明 有了定理 10, 我们便可以证明 § 6.3中的定理 3. 事实上, 如果方程组(6.27)的线性近似方程组(6.46)的特征根 λ_i 满足 $\lambda_i+\lambda_j\neq0$, 则可取矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为任一定负对称矩阵, 例如可取为负单位矩阵 $-\boldsymbol{E}$, 根据定理 10, 存在二次型

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}) \tag{6.51}$$

其通过线性方程组(6.46)的全导数为

$$\frac{dV}{dt}=\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T(-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$$

于是二次型(6.51)通过非线性方程组(6.27)的全导数有

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})) \\ &=-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{6.52}$$

利用关于 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ 的条件(6.28), 只要取原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的足够小的邻域便可使在此域内有

$$\left|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\right|<\frac{1}{4}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$$

这时由(6.52)便有

$$\frac{dV}{dt}<-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$$

即二次型(6.51)通过(6.27)的全导数是定负的.

因此，当(6.27)的线性近似方程组(6.46)的特征根均具负实部时,显然有 $\lambda_i+\lambda_j\neq 0$, 由定理 10 知二次型(6.51)是定正的. 又因$\frac{dV}{dt}$定负,故根据定理 5,非线性方程组(6.27)是零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的.

当(6.27)的线性近似方程组有正实部特征根时，我们考虑线性方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\left(\boldsymbol{A}-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x} \qquad (6.46)^*$$

这里 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵,μ 是某正实数. 显然,矩阵$\boldsymbol{A}-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{E}$的特征值等于$\lambda-\frac{\mu}{2}$，而 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 因此,只要 μ 取得适当小,使方程组(6.46)* 仍有正实部的特征根，且使任两个特征根之和均不为零. 于是由定理 10 知道对任意的定正对称矩阵,如 $\boldsymbol{E}$，存在不是常负的对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式(6.49),在此即有

$$\left(\boldsymbol{A}-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{E}\right)^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{E}\right)=\boldsymbol{E}$$

或
$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$$

这样一来，二次型(6.51)通过非线性方程组(6.27)的全导数有

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}))\\&=\mu V+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

在原点的足够小邻域内,$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$可取得使

$$W(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$$

仍为定正的. 而由于二次型(6.51)不是常负的,即在原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的任意小邻域内均有 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$ 使$V(\boldsymbol{x}_0)>0$. 因此,满足定理 5 中关于不稳定的条件,故方程组(6.27)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的. 至此定理 3 证毕.

非线性方程组只有在非临界情形才可以按线性近似决定其稳定性,而且仅在原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的小邻域中成立. 如果涉及到大范围或者是全局的稳定性态时,问题就复杂得多了,正如前面讨论中所看到的,即使是在二维情形也往往只能对某类特殊方程例如范得坡方程或李安纳特方程进行讨论,对高维的情形更是如此. 下面我们讨论控制系统中提出来的一类非线性微分方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\varphi(\sigma)\boldsymbol{b}\\[2mm]\dfrac{d\xi}{dt}=\varphi(\sigma),\quad \sigma=\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x}-\gamma\xi\end{cases}\tag{6.53}$$

这里 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维向量,表示控制系统的某种状态,一般叫做状态变量;ξ 是辅助变量;σ 为反馈信号;常量 γ 和向量 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{e}$ 是控制参数;函数 $\varphi(\sigma)$表示非线性特征,它满足条件:

(*a*) $\varphi(\sigma)$连续,$\varphi(0)=0$,而当 $\sigma\neq0$ 时 $\sigma\varphi(\sigma)>0$.

(6.54)

(*b*) $\Phi(\sigma)=\int_0^\sigma\varphi(\sigma)d\sigma\to\infty$(当$|\sigma|\to\infty$)

例 2 考虑带有控制机构的一个自由度的运动系统

$$\begin{cases}\dfrac{d^2z}{dt^2}+3\dfrac{dz}{dt}+2z=\dfrac{1}{4}\xi\\[2mm]\dfrac{d\xi}{dt}=\varphi(\sigma),\quad \sigma=2z+K\dfrac{dz}{dt}-\xi\end{cases}\tag{6.55}$$

这个运动方程中有控制力$\dfrac{1}{4}\xi$起作用,而控制变量 ξ 的运动方程

中 ξ 的加速度和恢复力可以忽略，仅剩下速度分量在间接起作用，例如使用液压装置的控制机构便是这样．控制机构是通过运动变量 z 及其速度分量和控制变量 ξ 的线性组合 σ 起作用，2, K, -1 是控制机构的调节参数，$\varphi(\sigma)$是作用力函数，它满足条件(6.54)．

首先通过变换 $y_1=z$, $y_2=\frac{dz}{dt}$将系统(6.55)化为方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=y_2\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-2y_1-3y_2+\dfrac{1}{4}\xi\\ \dfrac{d\xi}{dt}=\varphi(\sigma),\quad \sigma=2y_1+Ky_2-\xi\end{cases}$$

如果我们再取变换

$$x_1=y_2,\quad x_2=-2y_1-3y_2+\frac{1}{4}\xi$$

便可以得到

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-2x_1-3x_2+\dfrac{1}{4}\varphi(\sigma)\\ \dfrac{d\xi}{dt}=\varphi(\sigma),\quad \sigma=(K-3)x_1-x_2-\dfrac{3}{4}\xi\end{cases}\tag{6.56}$$

这就是(6.53)型的方程组．

下面来讨论在什么条件下，只要函数 $\varphi(\sigma)$满足(6.54)，则方程组(6.53)的零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是全局渐近稳定的，即零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 稳定且对所有取任意初始向量的解 $\boldsymbol{x}(t)$，当 $t\to\infty$ 时均趋于 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$．满足上述条件的方程组(6.53)称为**绝对稳定的**．

方程组(6.53)当 $\gamma=0$ 时化为较简单的方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\varphi(\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}\tag{6.57}$$

相应的控制系统称为**直接控制系统**. 而当 $\gamma\neq0$ 时的方程组(6.53)所对应的控制系统则称为**间接控制系统**. 由于间接控制系统在实际中比较重要，下面主要讨论间接控制系统.

对 $\gamma\neq0$ 的方程组(6.53)宜化为含 $\boldsymbol{x}$ 和 σ 的导数的形式，即

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\varphi(\sigma)\boldsymbol{b}\\[2mm]\dfrac{d\sigma}{dt}=\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\rho\varphi(\sigma),\quad \rho=\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{b}-\gamma\end{cases}\tag{6.58}$$

下面我们对方程组(6.58)进行讨论. 因此时有 $n+1$ 个变量 $\boldsymbol{x},\sigma$，故其绝对稳定的含义变为对满足条件(6.54)的任意函数 $\varphi(\sigma)$，方程组(6.58)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\sigma=0$ 是全局渐近稳定的.

为了讨论方程组(6.58)的绝对稳定性，我们先确定其必要条件. 显然，函数 $\varphi(\sigma)$ 可以只取高次项，这就要求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不含有正实部的特征值. 否则只要构造满足条件(6.54)的函数 $\varphi(\sigma)$，例如取 $\varphi(\sigma)=\sigma^3$，则根据定理 3，方程组(6.58)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\sigma=0$ 是不稳定的.

其次，如取 $\varphi(\sigma)=\mu\sigma$，则只要 $\mu>0$，条件(6.54)就得到满足. 这时方程组(6.58)变为线性方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{b}\sigma\\[2mm]\dfrac{d\sigma}{dt}=\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\mu\rho\sigma,\quad \rho=\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{b}-\gamma\end{cases}\tag{6.59}$$

绝对稳定性要求其特征方程

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E} & \mu\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{A} & \mu(\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{b}-\gamma)-\lambda\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\lambda^{n+1}+\cdots+a_{n+1}=0$$

的根均具负实部，根据定理 4 必须有

$$(-1)^{n+1}a_{n+1}=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \mu\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{A} & \mu(\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{b}-\gamma)\end{vmatrix}$$

$$=\mu\gamma\det(-A)>0$$

于是 $\det A\neq 0$，故矩阵A不能有零特征值．如果矩阵A只有负实部特征值，则 $\det(-A)>0$，前面已设 $\mu>0$，于是由上式应该有 $\gamma>0$．这些归结为如下定理：

定理 11 间接控制系统的微分方程组 (6.53) 亦即其等价组 (6.58)绝对稳定的必要条件是矩阵A没有具正实部的特征值，也没有零特征值．当矩阵A的特征值均具负实部时，要求控制参数 $\gamma>0$．

为了进一步确定绝对稳定的充分条件，我们要设法构造李雅普诺夫函数．由于现在讨论的是全局渐近稳定性，故必须把李雅普诺夫渐近稳定性定理推广到全局范围去．与§6.4的定理5的渐近稳定性部分相对应，有下面的定理．

定理 12 假设微分方程组(6.34)的定义域为全空间，即 $A=+\infty$．如果有定义于全空间的定正函数 $V(\boldsymbol{x})$，当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$ 时 $V(\boldsymbol{x})\to\infty$，而通过方程组(6.34)的全导数$\frac{dV}{dt}$为定负，则方程组(6.34)的零解是全局渐近稳定的．

定理 12 的证明与定理 5 相同．由$\frac{dV}{dt}$的定负性可知，对任给 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$，满足初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$必有

$$V(\boldsymbol{x}(t))<V(\boldsymbol{x}_0),\quad t>t_0$$

再由关于函数V的假设，推知这时一定存在正数 H_0 使得对一切 $t\geqslant t_0$成立不等式

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant H_0$$

在定理 5 的渐近稳定性的证明中用此 H_0 代替H即可．

有了全局渐近稳定性定理12，还必须构造适合条件的V函数．对方程组(6.58)，我们采用如下形式的V函数

$$V(\boldsymbol{x},\sigma)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\int_0^\sigma\varphi(\sigma)d\sigma=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\Phi(\sigma)\qquad(6.60)$$

这里右端第一项为相应于线性方程组(6.46)由关系式(6.49)所确定的二次型(6.47)，其中矩阵$\boldsymbol{C}$为某对称定负矩阵.

如果我们假设矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值均具负实部，则由定理 10，二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 是定正的. 由条件(6.54)，当 $\sigma\neq0$ 时 $\Phi(\sigma)>0$；而当$|\sigma|\to\infty$ 时 $\Phi(\sigma)\to\infty$. 故函数 $V(\boldsymbol{x},\sigma)$是定正的，并且当$\|\boldsymbol{x}\|+|\sigma|\to\infty$ 时 $V(\boldsymbol{x},\sigma)\to\infty$，因此，就函数 $V(\boldsymbol{x},\sigma)$本身而言，定理 12 提出的有关条件已满足.

现在进一步要求函数 $V(\boldsymbol{x},\sigma)$通过(6.58)的全导数$\frac{dV}{dt}$亦满足定理 12 的条件，即$\frac{dV}{dt}$是定负的. 为此计算$\frac{dV}{dt}$，并利用关系式(6.49)得到

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}+\frac{d\sigma}{dt}\varphi(\sigma)\\&=\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\varphi(\sigma)\\&\quad+\varphi(\sigma)(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\rho\varphi(\sigma))\\&=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}\varphi(\sigma)+\rho\varphi^2(\sigma)\end{aligned}\qquad(6.61)$$

这里

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}\qquad(6.62)$$

为确定(6.61)右端二次型的定号性，我们将(6.61)改写成

$$\frac{dV}{dt}=(\boldsymbol{x}^T+\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{C}^{-1}\varphi)\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}\varphi)+(\rho-\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d})\varphi^2\qquad(6.63)$$

注意到$\boldsymbol{C}$是对称定负矩阵，由上式直接推知，作为$\boldsymbol{x}$，φ的二次型$\frac{dV}{dt}$为定负的充要条件是

$$\rho < \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{d} \tag{6.64}$$

这样便证明了如果满足（6.49）的矩阵$\boldsymbol{C}$是定负的，而且式(6.64)成立时，$\frac{dV}{dt}$是定负的. 反之，如果$\frac{dV}{dt}$对一切满足条件(6.54)的函数 $\varphi(\sigma)$均是定负的，特别地当 $\varphi(\sigma)=\sigma$ 时结论仍然正确. 这时，若令 $\sigma=0$，则$\frac{dV}{dt}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ 关于$\boldsymbol{x}$是定负的，而当用σ代替φ时式(6.63)是$\boldsymbol{x}$和σ的定负二次型，由此推知式(6.64)必须成立. 这样就证明了矩阵$\boldsymbol{C}$定负和条件(6.64)是$\frac{dV}{dt}$为定负的充分必要条件.

综上所述，得到间接控制系统绝对稳定性的定理如下:

定理 13　对方程组(6.58)，假设矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征值均具负实部，且 $\gamma>0$. 如果找到一个定负的对称矩阵$\boldsymbol{C}$，而由式(6.49)所确定的对称矩阵$\boldsymbol{B}$满足条件(6.62)及(6.64)，则方程组(6.58)是绝对稳定的.

如果采用(6.60)形式的V函数和定理 12 来确定(6.58) 的绝对稳定性，上述条件并且是必要的.

有了定理 13，我们便可以讨论例 2 的控制系统(6.55) 中调节参数K的选择问题：为使系统(6.55)是绝对稳定的，K必须取值于什么范围?

系统(6.55)是一个间接控制系统，其相应的方程组(6.56)中$\gamma=\frac{3}{4}\neq 0$. 依照前面阐述的方法，把方程组(6.56)改写为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-2x_1-3x_2+\dfrac{1}{4}\varphi(\sigma) \\ \dfrac{d\sigma}{dt}=2x_1+Kx_2-\varphi(\sigma), \quad \sigma=(K-3)x_1-x_2-\dfrac{3}{4}\xi \end{cases}$$

对应于方程组(6.58)，这里有

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}\quad e=\begin{bmatrix}K & -3\\ & -1\end{bmatrix}$$

$$\gamma=\frac{3}{4},\ \rho=-1$$

在例1中已知矩阵A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$，且对定负对称矩阵$C=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，找到满足(6.49)的对称矩阵

$$B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

根据定理13，绝对稳定的充分条件是式(6.64)成立．为计算(6.64)式，通过式(6.62)求d:

$$d=Bb+\frac{1}{2}A^Te=\begin{bmatrix}\frac{5}{4}\\ \frac{K}{2}+\frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

而矩阵C的逆矩阵$C^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，这样，将$\rho,d,C^{-1}$代入式(6.64)得到

$$-1<-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{K}{2}+\frac{1}{8}\right)^2$$

化简后得到

$$-\frac{\sqrt{39}+1}{4}<K<\frac{\sqrt{39}-1}{4}\tag{6.65}$$

于是当调节参数K满足条件(6.65)时，系统(6.55)是绝对稳定的．

必须指出的是上述的参数范围是依赖于定负对称矩阵C的选

取的，例如，取矩阵$C=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，则调节参数$K$的范围将缩小成

$$K<\frac{3\sqrt{94}-4}{24} \tag{6.65}^*$$

这仅仅是一个简单的例子，实际的控制系统往往复杂得多。例如，仅考虑纵向运动的飞机控制系统即是有4个变量的方程组，如果除纵向运动外，同时还考虑水平、横向的运动，飞机的控制系统就更加复杂了。

前面只是简略地介绍了研究间接控制系统的V函数方法。鉴于控制系统(6.53)在实际应用方面的重要性和科学技术迅速发展的需要，六十年代以来，国内外对间接和直接控制系统(6.53)都作了大量的研究和探讨。除了前面介绍的V函数方法外，波波夫(V. M. Popov)还通过拉普拉斯变换用另一种途径找到了控制系统(6.53)绝对稳定的一些充分条件。对控制系统的进一步介绍已超出了本书的范围，有兴趣的读者可参考有关专著(例如，S. Lefschetz, Stability of nonlinear Control Systems, Academic Press, New York, 1965)。

习 题 6.6

1. 试将下列线性方程化成线性方程组，然后对方程组求二次型V函数$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$，使其通过方程组的全导数$\frac{dV}{dt}=-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$，并判断函数$V(\boldsymbol{x})$的定号性：

(1) $\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+9y=0$

(2) $\frac{d^3y}{dt^3}+5\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+y=0$

2. 给定线性方程组

$$\frac{dx_1}{dt}=5x_1-x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=3x_1+x_2$$

试求出二次型 V 函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x}$, 使其通过上述方程组的全导数

$$\frac{dV}{dt}=x_1^2+2x_1x_2+4x_2^2$$

并判断函数 $V(\boldsymbol{x})$ 的定号性.

3. 试验证不等式(6.65)* 的正确性, 即证明对方程组 (6.55), 如果取矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

则当调节参数 $K<\frac{3\sqrt{94}-4}{24}$ 时, 方程(6.55)是绝对稳定的,

本章学习要点

本章主要讨论非线性微分方程及其解的稳定性态.

首先, 从最简单的常系数二阶线性方程组着手, 研究了轨线在相平面上的性态, 得到各种类型的奇点及其相应的稳定性态. 接着, 在§6.3讨论了高阶线性微分方程组的稳定性, 以及可以由线性近似决定其稳定性态的非线性方程组. 为了解决包括临界情形的一般情况下非线性方程组的稳定性, 在§6.4重点介绍了一种很强有力的工具——李雅普诺夫 V 函数方法, 包括 V 函数的定号性概念和用 V 函数判断稳定性的基本定理. §6.5中讨论的是二阶非线性方程组解的全局图貌, 给出了相平面上极限圈的存在性判断方法. 最后在§6.6中, 先讨论线性方程组的 V 函数的构造方法, 然后研究了一类自动控制系统的(全局)绝对稳定性.

这一章的内容较多, 提出了不少新的概念和方法. 学习时, 要抓住一条线索, 就是为了判断微分方程解的性态, 如何从线性、近似线性逐步深入, 而最后提出了一般的 V 函数方法. 并且, 对非线性方程组, 还由零解邻域的局部性态而过渡到全局的图貌, 包括

相平面上的极限圈及一类自动控制系统的(全局)绝对稳定性.

本章介绍的内容属于常微分方程理论中主要的两个方面：稳定性理论和定性理论. 稳定性理论研究的是特殊的或一般的非线性微分方程组解的稳定性态，包括局部或全局的稳定性. 定性理论则研究包括奇点和极限圈在内的相平面或相空间中轨线的全局图貌及其性质. 它们的发展除了常微分方程理论本身的发展需要外，还在力学、现代控制理论、空间技术等方面有着广泛的应用. 这里只作了一些简单的初步介绍，希望能对进一步学习、研究常微分方程理论有所帮助.

第七章　一阶线性偏微分方程

§7.1　基本概念

一阶偏微分方程是联系着自变量、未知函数及其一阶偏导数的关系式，一般可表为如下形式:

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n; u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0 \tag{7.1}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n\geqslant 2)$ 是自变量，而 u 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的未知函数. 如果 F 关于变元 $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ 是线性的，其系数为自变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的已知函数，则方程(7.1)称为**线性的**；它的特殊情形

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0 \tag{7.2}$$

称为**齐线性的**. 如果 F 关于偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ 是线性的，而系数不仅依赖于自变量 $x_1, \cdots, x_n$，同时还可能与未知函数 u 有关，即具有形式

$$\sum_{j=1}^{n} Y_j(x_1, \cdots, x_n; u)\frac{\partial u}{\partial x_j}=Z(x_1, \cdots, x_n; u) \tag{7.3}$$

则方程(7.1)称为**拟线性的**.

函数 $u=\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 称为偏微分方程(7.1)的**解**，如果它在 $(x_1, \cdots, x_n)$ 空间的某个域 D 内连续和存在一阶偏导数，当把它们代入 F 的相应变元时，能使得方程(7.1)对于这些自变量成为恒等式，即在 D 内成立恒等式

$$F\left(x_1, \cdots, x_n; \varphi(x_1, \cdots, x_n), \frac{\partial \varphi(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \varphi(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_n}\right)\equiv 0.$$

解 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 可以想像为在空间 $(x_1,\cdots,x_n,u)$ 中的一张 n 维曲面，通常称为偏微分方程(7.1)的**积分曲面**.

本章仅限于讨论一阶齐线性方程(7.2)和拟线性方程(7.3)的求解问题. 一般线性方程可同拟线性方程一样处理，在此不另介绍. 在下面的讨论中将涉及"通解"的概念. 所谓齐线性方程(7.2)或拟线性方程(7.3)的**通解**就是指在某域内的一切解的一般表示式.

例 1 对于一阶齐线性方程

$$\alpha u_x+\beta u_y=0$$

其中 α 和 β 为常数，$\alpha^2+\beta^2\neq 0$. 令

$$\xi=\beta x-\alpha y,\quad \eta=\beta x+\alpha y$$

将方程化为 $u_\eta=0$，从而 $u=\Phi(\xi)=\Phi(\beta x-\alpha y)$，这就是原方程的通解，其中 Φ 为其变元的任意可微函数. 易见 $u=\Phi(x+y)$ 就是方程 $u_x=u_y$ 的通解.

例 2 考虑拟线性方程

$$u_x g_y(x,y,u)-u_y g_x(x,y,u)=0$$

其中 g 为已知函数.

设 $u=u(x,y)$ 为方程的任一解，记 $v(x,y)=g(x,y,u(x,y))$ 则由于

$$\begin{aligned}\frac{D(u,v)}{D(x,y)}&=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=u_xv_y-u_yv_x\\&=u_x(g_y+g_u\cdot u_y)-u_y(g_x+g_u\cdot u_x)\\&=u_xg_y-u_yg_x\equiv 0\end{aligned}$$

推知 u 与 v 之间存在着函数关系，即

$$\Phi(u,g(x,y,u))=0\quad 或\quad u=\varphi(g(x,y,u))$$

注意到 u 的任意性，可知上述关系式所确定的隐函数就是方程的

通解，这里Φ和φ分别为其变元的任意可微函数.

特别地，方程$u_y+uu_x=0$的解由关系式$u=\varphi(uy-x)$所确定.

上述求解过程是针对具体方程给出的，我们将看到，一般的齐线性方程(7.2)的求解过程将跟常微分方程组

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n} \tag{7.4}$$

发生密切的关系．我们称方程(7.4)为齐线性方程(7.2)的**特征方程**．拟线性方程(7.3)的求解问题则可化为(7.2)的方程类型来处理．下面逐一介绍这些问题.

§7.2 一阶线性偏微分方程与常微分方程组的关系

为讨论的需要，我们首先引入首次积分的概念．考虑初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy_i}{dx}=f_i(x;y_1,\cdots,y_n)\\ y_i(x_0)=y_i^0\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{7.5}$$

其中f_i在域G内满足存在唯一性定理的条件(见第六章)，根据这一定理，上述初值问题在包含点$(x_0;y_1^0,\cdots,y_n^0)$的某个域内有唯一的一组解

$$y_i=\varphi_i(x;x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

利用解的唯一性，不难由此推出关系式:

$$y_i^0=\varphi_i(x_0;x,y_1,\cdots,y_n)\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{7.6}$$

容易看出，(7.6)的每一个关系式的右端函数φ_j都有这样的特性：设$y_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$为方程(7.5)的经过点$(x_0;y_1^0,\cdots,y_n^0)$附近的任一解，当把它们代入φ_j时，所得的将是一个常数，且此常数值随不同解而异，这种函数φ_j就称为方程(7.5)的首次积分，或更确

切地定义如下:

首次积分 在域G内连续可微且不恒等于常数的函数$\psi(x, y_1, \cdots, y_n)$,如果其中的变元$y_i(i=1, 2, \cdots, n)$用方程组(7.5)的任一解$y_i(x)(i=1, 2, \cdots, n)$代替时,它就取常数值(对不同的解,常数值也不同),则关系式$\psi(x, y_1, \cdots, y_n)=c$称为方程组(7.5)的首次积分(有时也称$\psi(x, y_1, \cdots, y_n)$为首次积分),这里$c$为可允许范围内的任意常数.

方程组(7.5)的n个首次积分$\psi_j(x, y_1, \cdots, y_n)=c_j(j=1, 2, \cdots, n)$称为**彼此独立**的,如果雅可比行列式

$$\frac{D(\psi_1, \cdots, \psi_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}$$

在G内恒不为0. 对于对称型方程组(7.4)的$n-1$个首次积分$\varphi_j(x_1, \cdots, x_n)(j=1, 2, \cdots, n-1)$,则用矩阵

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

的秩为$n-1$来定义它们的彼此独立性.

下面着手讨论常微分方程组与一阶线性偏微分方程之间的关系.

先看$n=1$的情形,即考虑方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{7.7}$$

设它的通解为$y=\varphi(x, c)$,从中解出c即得

$$\psi(x, y)=c.$$

显然，这是方程(7.7)的首次积分．今以方程的任一解 $y(x)$ 代入，然后对 x 微分这一等式就得

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\equiv 0$$

或

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}f(x,y)\equiv 0$$

即 $u=\psi(x,y)$ 为一阶齐线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{7.8}$$

的解．

反之，设 $u=u(x,y)$ 为方程(7.8)的解，以方程(7.7)的任一解 $y(x)$ 代入后，再对 x 微分，我们将得到

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0$$

或

$$u(x,y(x))\equiv \text{const}$$

这表明 $u(x,y)=c$ 是方程(7.7)的首次积分．

综合上述可得"$u=u(x,y)$ 为(7.8)的解的充要条件是 $u(x,y)=c$ 为方程(7.7)的首次积分．"

这一结论对于 $n>1$ 的一般情况也成立．事实上，我们有下面定理．

定理 1 $\psi(x,y_1,\cdots,y_n)=c$ 是方程组(7.5)的首次积分的充要条件是在域 G 内成立着恒等式

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+f_1\frac{\partial\psi}{\partial y_1}+\cdots+f_n\frac{\partial\psi}{\partial y_n}\equiv 0 \tag{7.9}$$

证明 由存在定理知，对于任一点 $(x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)\in G$，方程(7.5)存在唯一解 $y_i=\varphi_i(x)$，满足条件 $y_i^0=\varphi_i(x_0)(i=1,2,\cdots,n)$．

若 $\psi(x, y_1, \cdots, y_n)=c$ 为首次积分，则 $\psi(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))$ $\equiv \text{const}$，从而

$$\frac{d}{dx}\psi(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))\equiv 0$$

特别地，当 $x=x_0$ 时有

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)+\sum_{i=1}^{n} f_i(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)\frac{\partial}{\partial y_i}\psi(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)$$

$$=0$$

再由 $(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)\in G$ 的任意性，推知恒等式(7.9)在 G 内成立。

反之，若恒等式(7.9)在 G 内成立，自然于方程(7.5)的解有意义之处也成立，因此

$$\frac{d}{dx}\psi(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))\equiv\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+f_1\frac{\partial\psi}{\partial y_1}+\cdots+f_n\frac{\partial\psi}{\partial y_n}\right)\Bigg|_{\substack{y_i=\varphi_i(x)\\ i=1,2,\cdots,n}}$$

$$\equiv 0$$

或

$$\psi(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))\equiv \text{const}$$

即 $\psi(x; y_1, \cdots, y_n)=c$ 是方程(7.5)的首次积分。

§7.3 利用首次积分求解常微分方程组

考虑方程组

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, \cdots, y_n),\ i=1, 2, \cdots, n \tag{7.5}$$

假设 f_i 于闭域 $\mathscr{D}$ 上连续可微，从而解的存在唯一性定理成立，我们有

定理 2 如果

$$\psi_j(x, y_1, \cdots, y_n)=c_j,\quad j=1, 2, \cdots, n \tag{7.10}$$

是方程组(7.5)的 n 个彼此独立的首次积分，则方程组(7.5)的任

一解均可由(7.10)通过选取适当的一组常数值 c_j 而确定.

证明　依定义$\dfrac{D(\psi_1,\cdots,\psi_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}\neq 0$，从而由(7.10)可以确定出函数

$$y_i=\varphi_i(x,c_1,\cdots,c_n),\ i=1,2,\cdots,n \tag{7.11}$$

且$\dfrac{d\varphi_i}{dx}$存在、连续.

首先，我们证明(7.11)是方程组(7.5)的解. 事实上，显然

$$\psi_j(x,\varphi_1(x,c_1,\cdots,c_n),\cdots,\varphi_n(x,c_1,\cdots,c_n))\equiv c_j,$$
$$j=1,2,\cdots,n$$

因而

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_j(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\psi_j(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\cdot\frac{d\varphi_i}{dx}\equiv 0$$
$$(j=1,2,\cdots,n) \tag{7.12}$$

另一方面，由于 $\psi_j=c_j(j=1,2,\cdots,n)$是(7.5)的首次积分，根据定理 1，在$\mathscr{D}$上有

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_j+f_1\frac{\partial\psi_j}{\partial y_1}+\cdots+f_n\frac{\partial\psi_j}{\partial y_n}\equiv 0\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

特别地对 $y_i=\varphi_i(x,c_1,\cdots,c_n)(i=1,2,\cdots,n)$成立，即

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_j(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)+\sum_{i=1}^{n}f_i(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\frac{\partial}{\partial y_i}\psi_j(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$$
$$\equiv 0 \tag{7.13}$$
$$(j=1,2,\cdots,n)$$

于是由(7.12)减去(7.13)得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi_j}{\partial y_i}\left[\frac{d\varphi_i}{dx}-f_i(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\right]\equiv 0\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

注意到$\dfrac{D(\psi_1,\cdots,\psi_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}\neq 0$，由上式推知

$$\frac{d\varphi_j}{dx}\equiv f_j(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

这表明

$$y_j=\varphi_j(x,c_1,\cdots,c_n)\quad(j=1,2,\cdots,n)\tag{7.11}$$

为方程(7.5)的解，其中 $c_1,\cdots,c_n$ 为任意常数。

现设方程(7.5)的任一解

$$y_i=\widetilde{\varphi}_i(x;x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

记 $\bar{c}_i=\psi_i(x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则由上述知 $y_i=\varphi_i(x,\bar{c}_1,\cdots,\bar{c}_n)(i=1,2,\cdots,n)$ 为方程（7.5）的解. 注意到 $\widetilde{\varphi}_i(x_0;\ x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)=\bar{y}_i=\varphi_i(x_0,\bar{c}_1,\cdots,\bar{c}_n)(i=1,2,\cdots,n)$，由解的唯一性，推知

$$\varphi_i(x,\bar{c}_1,\cdots,\bar{c}_n)\equiv\widetilde{\varphi}_i(x;x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

从而 $y_i=\widetilde{\varphi}_i(x;x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)(i=1,2,\cdots,n)$ 由(7.10)所确定，只需取 $c_i=\bar{c}_i=\psi_i(x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)(i=1,2,\cdots,n)$. 证毕.

方程(7.5)的 n 个彼此独立的首次积分的全体(7.10)称为(7.5)的**通积分**. 显然，求解方程组(7.5)的问题就归结为寻求它的 n 个彼此独立的首次积分. 如何求首次积分呢？没有一定的方法，但记住下面的事实往往是有益的：将方程组(7.5)写成对称形式

$$\frac{dx}{g_0}=\frac{dy_1}{g_1}=\frac{dy_2}{g_2}=\cdots=\frac{dy_n}{g_n}$$

其中 $g_j=g_0f_j(j=1,2,\cdots,n)$. 如能求得 $n+1$ 个不同时为零的函数 $\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_n$ 使得

1° $\mu_0g_0+\mu_1g_1+\cdots+\mu_ng_n=0$,

2° $\mu_0dx+\mu_1dy_1+\cdots+\mu_ndy_n$ 是某个函数 φ 的全微分，则 $\varphi=c$ 就是方程的一个首次积分.

例 1 求解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2-z^2} \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2xz}{x^2-y^2-z^2} \end{cases}$$

解 将方程写成对称的形式

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz} \tag{7.14}$$

由后一等式得到方程组的一个首次积分$\dfrac{y}{z}=c_1$.

为了得到另一个首次积分，我们用 x 乘(7.14)的第一个分式的分子和分母，用 y 乘第二个分式的分子和分母，用 z 乘第三个分式的分子和分母，然后将分式的分子、分母对应相加，根据比例的性质就得到

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{x(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dy}{2xy}$$

由此得到方程组的又一个首次积分

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=c_2$$

易证上述两个首次积分是彼此独立的，因此方程组的通积分可表为

$$\begin{cases} \dfrac{y}{z}=c_1 \\ \dfrac{x^2+y^2+z^2}{y}=c_2 \end{cases}$$

例 2 求方程组

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{xy}$$

的通积分.

解 这里 $g_0=xz, g_1=yz, g_2=xy$, 取 $\mu_0=y, \mu_1=x, \mu_2=-2z$, 就有 $\mu_0g_0+\mu_1g_1+\mu_2g_2=0$, 而 $\mu_0dx+\mu_1dy+\mu_2dz=d(xy-z^2)$,

于是 $xy-z^2=c_1$ 为方程的首次积分.

又从方程组的第一个等式, 得

$$\frac{x}{y}=c_2,$$

它也是方程组的首次积分，并且易知它与前一首次积分是彼此独立的. 因此我们得到方程组的通积分

$$\begin{cases} xy-z^2=c_1 \\ \dfrac{x}{y}=c_2 \end{cases}$$

例 3 求解方程组

$$\frac{Adx}{(B-C)yz}=\frac{Bdy}{(C-A)zx}=\frac{Cdz}{(A-B)xy}$$

其中 A、B、C 为常数.

解 取 $\mu_0=\frac{A}{B-C}x$, $\mu_1=\frac{-B}{C-A}y$, $\mu_2=0$, 而得第一个首次积分

$$\frac{A}{B-C}x^2-\frac{B}{C-A}y^2=c_1,$$

类似地取 $\mu_0=0$, $\mu_1=\frac{B}{C-A}y$, $\mu_2=\frac{-C}{A-B}z$, 就得另一个首次积分

$$\frac{B}{C-A}y^2-\frac{C}{A-B}z^2=c_2,$$

并且它跟前一首次积分是彼此独立的，于是它们构成方程组的通积分.

§7.4 一阶线性偏微分方程的解法

这一节我们将讨论一阶齐线性和拟线性偏微分方程的通解的结构.

首先考虑一阶齐线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n}X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0 \tag{7.2}$$

假设 $X_i(x_1,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,n)$ 于某域 D 内是所有变元的连续可微函数，并且处处不同时为零.

由上面讨论知道，方程(7.2)的解必为常微分方程组

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n} \tag{7.4}$$

的首次积分，反之亦然. 下面讨论方程(7.2)的通解的结构，我们有

定理 3 设 $\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是方程(7.4)的 $n-1$ 个彼此独立的首次积分，则方程(7.2)的通解可表为

$$u=\Phi(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1}) \tag{7.15}$$

其中 Φ 是其变元的任意连续可微函数.

证明 首先证明 $\Phi(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1})=c$（$c$ 为任意常数）是(7.4)的首次积分，从而(7.15)为方程(7.2)的解.

事实上，依假设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在 D 内处处不同时为零，不妨设 $X_n\neq 0$，于是方程(7.4)的解可表为 $x_j=\varphi_j(x_n)$，$j=1,2,\cdots,n-1$（即视 x_n 为自变量），又 $\psi_i=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是方程(7.4)的首次积分，因此有

$$\psi_i(\varphi_1(x_n),\varphi_2(x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_n),x_n)\equiv c_i \quad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

$c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 为相应确定的常数，从而

$$\Phi(\psi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\psi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n))\Big|_{\substack{x_j=\varphi_j(x_n)\\ j=1,2,\cdots n-1}}\equiv \text{const}$$

这表明 $\Phi(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1})=c$ 为方程(7.4)的首次积分.

其次证明(7.15)是方程(7.2)的通解，这只须证明对于方程(7.2)的任一解 $u=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，必定存在关系 $\tilde{\Phi}$，使得 $\varphi=\tilde{\Phi}(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1})$ 成立. 事实上，我们有

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, \cdots, x_n)\dfrac{\partial\varphi(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_i} \equiv 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, \cdots, x_n)\dfrac{\partial\psi_j(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_i} \equiv 0 \\ \qquad (j=1, 2, \cdots, n-1) \end{cases} \tag{7.16}$$

依假设 $X_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 在 D 内处处不同时为零，由线性代数方程组的基本理论推知，对于(7.16)必有

$$\frac{D(\varphi_1, \psi_1, \cdots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv 0$$

这就是说 $\varphi, \psi_1, \cdots, \psi_{n-1}$ 是函数相关的，即它们之间存在着函数关系，而已知 $\psi_1, \cdots, \psi_{n-1}$ 彼此独立，因此 φ 可由 $\psi_1, \cdots, \psi_{n-1}$ 表示，即 $\varphi=\tilde{\Phi}(\psi_1, \cdots, \psi_{n-1})$.

这一事实也可直接证明如下：为书写方便，取 $n=3$，注意到

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x_1, x_2)} \neq 0$$

我们可以从关系式 $u_1=\psi_1(x_1, x_2, x_3)$，$u_2=\psi_2(x_1, x_2, x_3)$中解出 x_1 和 x_2:

$$x_1=\omega_1(x_3, u_1, u_2), \quad x_2=\omega_2(x_3, u_1, u_2)$$

于是

$$u=\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv \varphi(\omega_1, \omega_2, x_3) \equiv \tilde{\Phi}(u_1, u_2, x_3)$$

余下只须证明 $\tilde{\Phi}$ 与 x_3 无关，即 $\dfrac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x_3} \equiv 0$，为此，注意到 $\dfrac{D(\varphi, \psi_1, \psi_2)}{D(x_1, x_2, x_3)} \equiv 0$，我们有

$$\begin{vmatrix} du & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ du_1 & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} \\ du_2 & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3}dx_3 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2}dx_2+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_3}dx_3 & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}dx_2+\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_3}dx_3 & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} dx_3 \equiv 0$$

或者展开为

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} du - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} du_1 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} \end{vmatrix} du_2 \equiv 0$$

又因$\dfrac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x_1, x_2)} \neq 0$, 上式可写为

$$du \equiv M_1 du_1 + M_2 du_2 \tag{7.17}$$

另一方面，我们有

$$du \equiv \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x_3}dx_3 \tag{7.18}$$

由(7.18)减去(7.17):

$$\left(\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial u_1} - M_1\right)du_1 + \left(\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial u_2} - M_2\right)du_2 + \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x_3}dx_3 \equiv 0$$

即
$$\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u_1}-M_1\right)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}dx_3\right)$$
$$+\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u_2}-M_2\right)\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}dx_3\right)+\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial x_3}dx_3\equiv 0$$
由于 dx_1, dx_2, dx_3 彼此无关，故在上式中它们的系数必须同时为零，即
$$\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u_1}-M_1\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u_2}-M_2\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\equiv 0$$
$$\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u_1}-M_1\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u_2}-M_2\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\equiv 0$$
$$\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u_1}-M_1\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}+\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u_2}-M_2\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial x_3}\equiv 0$$
由前两式推出$\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u_1}\equiv M_1$，$\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u_2}\equiv M_2$，再由最后一式推知$\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial x_3}\equiv 0$. 于是 $u=\widetilde{\Phi}(u_1,u_2)$，即 $\varphi=\widetilde{\Phi}(\psi_1,\psi_2)$. 证毕.

例 1 求方程 $\alpha u_x+\beta u_y=0$ 的通解，其中 α, β 为常数.

解 特征方程为$\frac{dx}{\alpha}=\frac{dy}{\beta}$，易见 $\beta x-\alpha y=c$ 为其首次积分. 因此所求通解为 $u=\Phi(\beta x-\alpha y)$，其中 $\Phi(\xi)$ 为 ξ 的任意连续可微函数. 这正与 §7.1 例 1 的结果一样.

例 2 求 $yz_x-xz_y=0$ 的通解.

解 特征方程为$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}$，而 $x^2+y^2=c$ 为其首次积分，于是所求通解为 $z=\omega(x^2+y^2)$、其中 ω 为任意连续可微函数.

例 3 求解方程
$$\frac{B-C}{A}yz\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{C-A}{B}zx\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{A-B}{C}xy\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

解 特征方程为
$$\frac{A\,dx}{(B-C)yz}=\frac{B\,dy}{(C-A)zx}=\frac{C\,dz}{(A-B)xy}$$

由§7.3例3知

$$\frac{A}{B-C}x^2-\frac{B}{C-A}y^2=c_1,\quad \frac{B}{C-A}y^2-\frac{C}{A-B}z^2=c_2$$

是它的两个彼此独立的首次积分，因此所求方程的通解为

$$u=\Phi\left(\frac{A}{B-C}x^2-\frac{B}{C-A}y^2,\quad \frac{B}{C-A}y^2-\frac{C}{A-B}z^2\right)$$

其中Φ为任意连续可微函数.

例4 求$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0$ 的通解.

解 特征方程为

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\cdots=\frac{dx_n}{x_n}$$

容易求得它的$n-1$个彼此独立的首次积分

$$\frac{x_1}{x_n}=c_1,\ \frac{x_2}{x_n}=c_2,\cdots,\ \frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1}$$

于是原方程的通解可表为

$$z=\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

其中$\Phi(u_1,\cdots,u_{n-1})$为$u_1,\cdots,u_{n-1}$的任意连续可微函数.

现在转入讨论一阶拟线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n}Y_i(x_1,\cdots,x_n;\ z)\frac{\partial z}{\partial x_i}=Z(x_1,\cdots,x_n;z)\tag{7.3}$$

的求解问题，假定$Y_i(x_1,\cdots,x_n;z)(i=1,2,\ \cdots,n)$及$Z(x_1,\cdots,x_n;z)$于某区域内是所有变元的连续可微函数，并且在所讨论区域内处处有$\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\neq 0$. 为书写方便，我们以$n=2$的情形，即

$$\sum_{i=1}^{2}Y_i(x_1,x_2;\ z)\frac{\partial z}{\partial x_i}=Z(x_1,x_2;z)\tag{7.19}$$

为例进行讨论.

设(7.19)的解表为隐函数形式

$$u(x_1, x_2; z)=0 \tag{7.20}$$

我们来分析一下，函数 u 必须满足什么关系.

设$\frac{\partial u}{\partial z}\neq 0$，于是可从(7.20)解出 $z=f(x_1, x_2)$，从而

$$u(x_1, x_2; f(x_1, x_2))\equiv 0$$

分别对 x_1 和 x_2 微分上恒等式，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x_1}\equiv 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x_2}\equiv 0$$

因而

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\equiv -\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial u}{\partial z} \quad (i=1, 2)$$

将 $z=f(x_1, x_2)$及上述关系式代入方程(7.19)，并注意到 $z=f(x_1, x_2)$为(7.19)的解，可得

$$-\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1, x_2; z)\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\equiv Z(x_1, x_2; z)$$

或

$$Y_1(x_1, x_2; z)\frac{\partial u}{\partial x_1}+Y_2(x_1, x_2; z)\frac{\partial u}{\partial x_2}+Z(x_1, x_2; z)\frac{\partial u}{\partial z}\equiv 0$$

即函数 u 满足一阶齐线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1, x_2; z)\frac{\partial u}{\partial x_i}+Z(x_1, x_2; z)\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{7.21}$$

且当以(7.20)所确定的 $z=f(x_1, x_2)$代入时(7.21)变为恒等式.

反之，若 $u(x_1, x_2; z)$是(7.21)的解，且$\frac{\partial u}{\partial z}\neq 0$，则易见(7.20)就是方程(7.19)的隐式解.

设 $\psi_i(x_1, x_2; z)=c_i(i=1,2)$是(7.21)的特征方程

$$\frac{dx_1}{Y_1}=\frac{dx_2}{Y_2}=\frac{dz}{Z}$$

的两个彼此独立的首次积分，则由定理 3，方程(7.21)的通解可表为 $u=\Phi(\psi_1, \psi_2)$，其中$\Phi(u_1, u_2)$是 u_1，u_2 的任意连续可微函数.

现证当$\frac{\partial \Phi}{\partial z}\neq 0$ 时$\Phi(\psi_1, \psi_2)=0$ 就是方程(7.19)的通解，即若 $z=g(x_1, x_2)$是(7.19)的某一解，则它必包含在 $\Phi(\psi_1, \psi_2)=0$ 之中，也即当选取 Φ 为某一函数时，以 $z=g(x_1, x_2)$代入 $\Phi(\psi_1, \psi_2)=0$ 就得到关于 x_1, x_2 的恒等式.

事实上，由定理 1 我们有

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1, x_2; g(x_1, x_2))\frac{\partial \psi_j(x_1, x_2; g(x_1, x_2))}{\partial x_i}$$

$$+Z(x_1, x_2; g(x_1, x_2))\frac{\partial \psi_j(x_1, x_2; g(x_1, x_2))}{\partial z}\equiv 0$$

$$(j=1,2)$$

同时，又有

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1, x_2; g(x_1, x_2))\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_i}\equiv Z(x_1, x_2; g(x_1, x_2))$$

由上述恒等式就得到

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1, x_2; g(x_1, x_2))\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}+\frac{\partial \psi_j}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\equiv 0 \quad (j=1,2)$$

或令 $\varphi_i(x_1, x_2)\equiv\psi_i(x_1, x_2; g(x_1, x_2))$ $(i=1,2)$而将上式写为

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1, x_2; g(x_1, x_2))\frac{\partial \varphi_j(x_1, x_2)}{\partial x_i}\equiv 0 \quad (j=1,2)$$

此式表明 $u=\varphi_j(x_1, x_2)(j=1,2)$均为方程

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1, x_2; g(x_1, x_2))\frac{\partial u}{\partial x_i}=0 \tag{7.22}$$

的解. 但 (7.22) 是两个自变量的一阶齐线性偏微分方程，由定理 3 知，它的任两个解之间必存在着函数关系. 于是必有 $\tilde{\Phi}$ 使 $\tilde{\Phi}(\varphi_1(x_1, x_2),\ \varphi_2(x_1, x_2))\equiv 0$，因此 $\Phi(\psi_1,\ \psi_2)=0$ 是(7.19) 的通解.

易见上述讨论过程对于 $n>2$ 的情形也完全适用. 因此，我们得到关于一阶拟线性偏微分方程(7.3)的通解结构的如下定理.

定理 4 设 $\psi_i(x_1, \cdots, x_n; z)=c_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是常微分方程组

$$\frac{dx_1}{Y_1}=\frac{dx_2}{Y_2}=\cdots=\frac{dx_n}{Y_n}=\frac{dz}{Z} \tag{7.23}$$

的 n 个彼此独立的首次积分，那么，若

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)=0 \tag{7.24}$$

这里$\Phi(u_1, \cdots, u_n)$为$u_1, \cdots, u_n$ 的任意连续可微函数，并能从(7.24) 确定函数 $z=z(x_1, \cdots, x_n)$，则(7.24) 即为拟线性方程 (7.3)的通解.

方程(7.23)称为拟线性方程(7.3)的**特征方程**.

例 5 求解线性方程 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=x^2-y^2$.

解 特征方程为

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{x^2-y^2}$$

容易求得它的两个彼此独立的首次积分

$$x^2+y^2=c_1 \quad 和 \quad xy+z=c_2$$

因此，所求偏微分方程的通解为

$$\Phi(x^2+y^2, xy+z)=0$$

其中 $\Phi(u_1, u_2)$为 u_1, u_2的任意连续可微函数.

例 6 求解拟线性方程 $y\frac{\partial z}{\partial x}=z$.

解 特征方程为$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{z}$，易见 $y=c_1$ 就是它的一个首次积分. 为了求其另一个首次积分，可将 $y=c_1$ 代入上述方程，然后积分可得

$$z=c_2\mathrm{e}^{\frac{x}{c_1}}$$

最后得到两个首次积分 $y=c_1$ 和 $z\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}=c_2$. 经检验它们还是彼此独立的. 因此所求偏微分方程的通解可表为

$$\Phi(y,z\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}})=0$$

其中 $\Phi(u_1,u_2)$为 u_1,u_2 的任意连续可微函数.

例 7 试求方程

$$(y-bz)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-az)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$$

的通解，这里 a, b 为常数.

解 不难求出特征方程

$$\frac{dx}{y-bz}=\frac{dy}{-(x-az)}=\frac{dz}{bx-ay}$$

的两个首次积分

$$\psi_1\equiv ax+by+z=c_1$$
$$\psi_2\equiv x^2+y^2+z^2=c_2$$

并且矩阵

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} & \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y} & \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}a & b & 1\\ 2x & 2y & 2z\end{bmatrix}$$

的秩等于 2，即 $\psi_1=c_1$ 与 $\psi_2=c_2$ 彼此独立. 于是所求通解为

$$\Phi(ax+by+z,x^2+y^2+z^2)=0$$

其中 $\Phi(u_1, u_2)$ 为 u_1, u_2 的任意连续可微函数.

§7.5 柯西(Cauchy)问题

上述一阶线性(拟线性)偏微分方程的求解过程，可以用几何的语言给予直观的解释. 考虑三维空间的一个连续向量场

$$\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

其中 P, Q, R 为 x, y, z 的连续函数，而 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是沿坐标轴的单位向量.

空间的一条曲线，若其上每点的切向量 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}dx+\boldsymbol{j}dy+\boldsymbol{k}dz$ 与该点的场向量 $\boldsymbol{F}$ 共线，则称该曲线为此向量场的**特征曲线**. 易见特征曲线可由微分方程式

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \tag{7.25}$$

来确定.

由特征曲线组成的曲面，确切地说，如果特征曲线与曲面有一交点，则曲线就整条落在曲面上，这样的曲面称为**特征曲面**. 因此，特征曲面上任一点处其法向量 $\boldsymbol{N}$ 与向量场的向量 $\boldsymbol{F}$ 正交，即

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F}=0 \tag{7.26}$$

当特征曲面为显函数形式 $z=z(x,y)$ 时 $\boldsymbol{N}=\frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，从而关系式(7.26)为

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R \tag{7.27}$$

当特征曲面为隐函数形式 $u(x,y,z)=0$ 时，

$$N=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

这时(7.26)为

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{7.28}$$

即是说一阶线性(拟线性)偏微分方程的解(积分曲面)是特征曲面．特征曲面由特征曲线组成．而寻求特征曲线的问题归结为求解常微分方程组．也就是说，一阶线性(拟线性)偏微分方程的求解问题可以归结为求解常微分方程组问题，这正与前面的分析结论相一致．

所谓柯西问题，用几何的语言说，就是求一阶偏微分方程(7.27)或(7.28)的通过某一给定曲线的积分曲面．这里必须指出①,对于某些曲线(譬如特征曲线)柯西问题是不确定的,因为对一条特征曲线而言,可以有无穷多个特征曲面经过它;而对于另外一些曲线,柯西问题甚至没有解存在．但是我们有下面的一般结果．

定理 5　假设方程(7.2)中 $X_i(x_1,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,n)$于域$D$内是所有变元的连续可微函数,且 $X_n\neq 0$,则柯西问题

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i(x_1,\cdots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=0\\ u|_{x_n=x_n^0}=f(x_1,\cdots,x_{n-1})\end{cases} \tag{7.29}$$

存在唯一解,其中 x_n^0是任意给定的数, $f(x_1,\cdots,x_{n-1})$是它的变元的已知可微函数．

证明　设 $\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是特征方程

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n} \tag{7.4}$$

的 $n-1$ 个彼此独立的首次积分,令

$$\psi_i(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n^0)\equiv\varphi_i(x_1,\cdots,x_{n-1})\quad(i=1,2,\cdots,n-1) \tag{7.30}$$

① 详细论述可参阅 R. 柯朗和D．希尔伯特著,熊振翔、杨应辰译《数学物理方法》第二卷(科学出版社，1977年)第二章．

注意到$\dfrac{D(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1})}{D(x_1,\cdots,x_{n-1})}\neq 0$，我们可从(7.30)确定出

$$x_i=\omega_i(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})\quad(i=1,2,\cdots,n-1)\tag{7.31}$$

同时 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 关于它的变元具有连续的一阶偏导数.

可以断言

$$u=f[\omega_1(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1}),\cdots,\omega_{n-1}(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1})]\equiv\Phi(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1})\tag{7.32}$$

就是柯西问题(7.29)的解.

事实上，若记 $X[u]\equiv X_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+X_n\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$，则

$$X[\Phi]=\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_1}X[\psi_1]+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_{n-1}}X[\psi_{n-1}]$$

而 $X[\psi_j]\equiv 0(j=1,2,\cdots n-1)$，故 $X[\Phi]\equiv 0$，即 $u=\Phi$ 满足方程(7.2)；又当 $x_n=x_n^0$时，注意到(7.30)和(7.31)，有 $u=f(x_1,\cdots,x_{n-1})$，就是说(7.32)为问题(7.29)的解.

现在进一步证明，问题(7.29)的解是唯一的. 设 $u=u_2(x_1,\cdots,x_n)$也是问题(7.29)的解. 记(7.32)为 $u_1(x_1,\cdots,x_n)$，则必有

$$u_1(x_1,\cdots,x_n)\equiv u_2(x_1,\cdots,x_n)$$

事实上，$u_i(x_1,\cdots,x_n)=c_i(i=1,2)$均为(7.4)的首次积分，于是对(7.4)的任一解 $x_i=x_i(x_n,x_1^0,\cdots,x_n^0)(i=1,2,\cdots,n-1)$有

$$\begin{aligned}u_1(x_1,\cdots,x_n)&\equiv u_1(x_1^0,\cdots x_{n-1}^0,x_n^0)=f(x_1^0,\cdots,x_{n-1}^0)\\&=u_2(x_1^0,\cdots,x_{n-1}^0,x_n^0)=u_2(x_1,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

由解 $x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$的任意性可知，对于变量 $x_1,\cdots,x_{n-1},x_n$ 只要 $f(x_1,\cdots,x_{n-1})$有定义，就有 $u_1(x_1,\cdots,x_n)\equiv u_2(x_1,\cdots,x_n)$，证毕.

关于拟线性一阶偏微分方程的柯西问题类似地有

定理 6 假定方程(7.3)中 $Y_i(x_1,\cdots,x_n;z)(i=1,2,\cdots,n)$和$Z(x_1,\cdots,x_n;z)$于某域内是所有变元的连续可微函数，并且$Y_n\neq 0$，

那末，柯西问题

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Y_i(x_1, \cdots, x_n;\ z)\dfrac{\partial z}{\partial x_i} = Z(x_1, \cdots, x_n; z) \\ z|_{x_n = x_n^0} = g(x_1, \cdots, x_{n-1}) \end{cases}$$

存在唯一解，其中 x_n^0 为任意给定的数，g 为关于它的变元连续可微的已知函数.

例 1 求柯西问题

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial z}{\partial y} - y\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ z|_{x=0} = y^2 \end{cases}$$

的解.

解 积分特征方程 $\dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x}$ 得 $x^2 + y^2 = c$，从而方程的通解为

$$z = \varphi(x^2 + y^2)$$

其中 φ 为其变元的任意可微函数.

计及所给条件得 $\varphi(y^2) = y^2$，因而 $\varphi(x^2 + y^2) = x^2 + y^2$，故所求解为 $z = x^2 + y^2$。

顺便指出，这里也可视所给方程为拟线性方程，而求出特征方程

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$$

的两个彼此独立的首次积分 $z = c_1$ 和 $x^2 + y^2 = c_2$，再由 $z = c_1$，$x^2 + y^2 = c_2$ 和 $x = 0$，$z = y^2$ 消去 x, y，z 得 $c_1 = c_2$，因此 $z = x^2 + y^2$ 就是所求的解.

例 2 给定方程

$$(y - bz)\frac{\partial z}{\partial x} - (x - az)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay \quad (b \neq -1)$$

求满足条件：$x = 0$，$z = y$ 的解。

解　由§7.4例7知道

$$ax+by+z=c_1,\quad x^2+y^2+z^2=c_2$$

是其特征方程的两个彼此独立的首次积分，由它们和条件 $x=0$ 时 $z=y$ 一起得到 $2\left(\frac{c_1}{b+1}\right)^2=c_2$，因此所求的解为

$$x^2+y^2+z^2=2\left(\frac{ax+by+z}{b+1}\right)^2$$

例 3　求柯西问题

$$\begin{cases}x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=1\\ x+y=1,\ u=0\end{cases}$$

的解.

解　特征方程为$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{u}=\frac{du}{1}$，容易求得它的两个彼此独立的首次积分

$$u+\frac{1}{x}=c_1,\quad 2y-u^2=c_2$$

由它们和 $x+y=1, u=0$ 消去 x, y, u 得到

$$c_1(2-c_2)=2$$

于是

$$\left(u+\frac{1}{x}\right)(2-2y+u^2)=2$$

或

$$\frac{x}{1+ux}=\frac{u^2}{2}-y+1$$

就是所求的解.

例 4　求柯西问题

$$\begin{cases}y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2-y^2\\ x+y=0,\quad z=0\end{cases}$$

的解.

解 特征方程$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{x^2-y^2}$ 有两个彼此独立的首次积分 $x^2+y^2=c_1$ 和 $2z-(x+y)^2=c_2$, 计及条件 $x+y=0$, $z=0$ 即得$c_2=$ $=0$, 因此所求的解为 $2z=(x+y)^2$.

例 5 求方程

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

通过圆周 $z=1$, $x^2+y^2=4$ 的积分曲面.

解 求解方程组

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}$$

得到特征曲线族 $z=c_1$, $x^2+y^2=c_2$, 易见所给圆周恰为特征曲线，因此问题是不确定的. 事实上,不难看出$4z=x^2+y^2$; $z=x^2+y^2-3$; $x^2+y^2+z^2=5$ 等均为问题的解.

例 6 求方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

通过曲线 $x_0=s$, $y_0=s^2$, $z_0=s^3$ 的积分曲面, s 为参数.

解 引入新参数 t, 并令 $dx=-dy=dz=dt$, 则此方程组满足条件 $x(t_0)=s$, $y(t_0)=s^2$, $z(t_0)=s^3$ 的解, 就是经过原给曲线的特征曲线, 在此就是 $x=t+s$, $y=-t+s^2$, $z=t+s^3$(这里取 $t_0=0$), 注意到积分曲面由特征曲线组成, 因此上述特征曲线族的全体就是所求的积分曲面.

习 题 7

(一) 求下列方程组的通积分及满足指定条件的解:

1. $\frac{dx}{dt}=x+y$, $\frac{dy}{dt}=x+y+t$

2. $\dfrac{dx}{dt}=y+1$, $\dfrac{dy}{dt}=x+1$, 当 $t=0$ 时 $x=-2$, $y=0$

3. $\dfrac{dx}{dt}=x-2y$, $\dfrac{dy}{dt}=x-y$, 当 $t=0$ 时 $x=y=1$

4. $\dfrac{dx}{z-y}=\dfrac{dy}{x-z}=\dfrac{dz}{y-x}$

(二) 求下列方程的通解及满足给定条件的解:

1. $yu_x-xu_y+(x^2-y^2)u_z=0$

2. $(z^2-2yz-y^2)u_x+(xy+xz)u_y+(xy-xz)u_z=0$

3. $x^2z_x-xyz_y+y^2=0$

4. $(y^3x-2x^4)z_x+(2y^4-x^3y)z_y=9z(x^3-y^3)$

5. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=nu$, n 为自然数

6. $(u+y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(u+x+z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(u+x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$

7. $\dfrac{y-z}{yz}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{z-x}{zx}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x-y}{xy}$

8. $(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z+x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y$, $x=1$, $z=y$

9. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, $y=1$, $z=3x$

10. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, $x=0$, $z=y^3$

(三) 求与下列曲面族正交的曲面(a 为任意常数):

1. $z=axy$

2. $xyz=a$

3. $z^2=axy$

(四) 试证方程(第二章(2.43)式)

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

有仅与 x 有关的积分因子的充要条件是

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N$$

仅是 x 的函数.

(五) 证明以坐标原点为顶点的锥面方程可写为

$$\Phi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right)=0 \quad 或 \quad z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

其中 Φ, φ 为其变元的可微函数.

附录I 拉普拉斯变换

我们在第四章、第五章中已经看到，拉普拉斯变换法是解常系数线性微分方程(组)的一种简便方法. 由于运用拉普拉斯变换这一工具，使微积分的运算能由复变数的代数运算来代替，因而使常系数线性微分方程(组)能转换成复变数的代数方程. 于是在寻求满足初始条件的常系数线性微分方程(组)的特解时，无须按常规首先寻找通解，然后再由初始条件去确定积分常数，而只要借助于拉普拉斯变换表及一些部分分式展开法即可求出.

这里就拉普拉斯变换的一些概念、基本性质及几个常用函数的拉普拉斯变换的推导作一个简略的介绍.

§1 拉普拉斯变换的定义

如果在实变数 $t\geqslant 0$ 上有定义的函数 $f(t)$ 使积分

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt \tag{1}$$

对于已给的一些 s（这里 s 一般取为复数)存在，则称

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \tag{2}$$

为函数 $f(t)$ 的**拉普拉斯(Laplace)变换**① 通常用符号 $\mathscr{L}$ 来表示拉普拉斯变换，它是一种运算符号，变换 $\mathscr{L}$ 施行于 $f(t)$ 时，便给出 $F(s)$，也就是说，对于函数 $f(t)$，通过拉普拉斯积分(1)，便有一个函数 $F(s)$ 与之对应，因而 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$.

---

① 必须指出，在拉普拉斯变换的定义中，亦可把函数 $f(t)$ 取作向量形式的，即 $\boldsymbol{f}(t)=[f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t)]^T$，则由公式所确定的 $F(s)$ 亦有向量的形式 $\boldsymbol{F}(s)=[F_1(s),F_2(s),\cdots,F_n(s)]^T$，因此，在下面所述的各种拉普拉斯变换的公式中，都可以把原函数 $f(t)$ 和象函数 $F(s)$ 看作为向量，这在解决微分方程组的问题时是有用的(参阅第五章).

例 1 对于 $f(t)=1$ $(t\geqslant 0)$

$$\int_0^{\infty} e^{-st}dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{s}-\frac{e^{-sT}}{s}\right]=\frac{1}{s}\quad(\mathrm{Re}s>0)$$

这里 $\mathrm{Re}s$ 表示 s 的实部. 由于上述极限当且仅当 $\mathrm{Re}s>0$ 时才存在,因此常数 1 的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}[1]=\int_0^{\infty} e^{-st}dt=\frac{1}{s}\qquad(\mathrm{Re}s>0)\tag{3}$$

例 2 利用例 1 的相同步骤立即可以计算出指数函数 $f(t)=e^{zt}$(其中 z 是给定的实数或复数)的拉普拉斯变换:

$$\mathscr{L}[e^{zt}]=\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot e^{zt}dt$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-(s-z)t}dt=\frac{1}{s-z}\qquad(\mathrm{Re}s>\mathrm{Re}z)\tag{4}$$

究竟函数 $f(t)$ 须满足哪些条件才能使积分(1)存在? 当函数 $f(t)$确定后, s 又该取哪些值呢? 由于篇幅所限,我们对这些问题(可以把它们称为拉普拉斯变换存在的条件)不作详细的讨论. 在这里,我们只指出,假若函数 $f(t)$在 $t\geqslant 0$ 的每个有限区间上是分段连续的, 并且 $f(t)$不比指数函数增大得快, 即存在这样的两个常数$M>0$, $\sigma\geqslant 0$, 使对于所有的 $t\geqslant 0$ 都有

$$|f(t)|<Me^{\sigma t}\tag{5}$$

那么拉普拉斯积分(1)必然存在(只需 $\mathrm{Re}s>\sigma$), 换句话说, $f(t)$的拉普拉斯变换是存在的. 下面我们只限于讨论这种类型的函数 $f(t)$, 并把 $f(t)$称为**原函数**, 相应地把它的拉普拉斯变换 $F(s)$称为**象函数**.

显然, 函数 $1, t, t^n$(n 是正整数), $\sin t$, $\cos t$, e^{zt}(z 是任意给定的复数)等都是属于这种类型的函数(原函数), 因此它们的拉普

拉斯变换是存在的. 然而,对于函数 e^{t^2} 和 te^{t^2},显然积分(1)不存在,因而对这类函数就不能进行拉普拉斯变换. 我们已在例 1、例 2 中实际推导出 1 和 e^{2t} 的拉普拉斯变换,对于 t 和 $\sin t$ 的拉普拉斯变换,我们亦把它们作为例子具体推导如下.

例 3 求函数 $f(t)=t$ 的拉普拉斯变换.

$$\mathscr{L}[t]=\int_0^{\infty} t e^{-st}dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T t e^{-st}dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\left[t\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=T}+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^T e^{-st}dt$$
$$=\frac{1}{s}\mathscr{L}[1]=\frac{1}{s^2}\qquad(\mathrm{Re}s>0)\tag{6}$$

例 4 求正弦函数 $f(t)=\sin t$ 的拉普拉斯变换.

由定义

$$\mathscr{L}[\sin t]=\int_0^{\infty} e^{-st}\sin t\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}\sin t\,dt$$

因为

$$\sin t=\frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}t}-e^{-\mathrm{i}t})$$

其中 i 表示虚数单位,所以

$$\mathscr{L}[\sin t]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^T e^{-st}(e^{\mathrm{i}t}-e^{-\mathrm{i}t})dt$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-(s-\mathrm{i})t}dt-\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-(s+\mathrm{i})t}dt\right]$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{i}}-\frac{1}{s+\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{s^2+1}\qquad(\mathrm{Re}s>0)\tag{7}$$

这里显然有 $\mathrm{Re}(s-\mathrm{i})=\mathrm{Re}(s+\mathrm{i})=\mathrm{Re}s$.

余弦函数 $\cos t$ 的拉普拉斯变换可用类似方法求得.

我们知道,任何可进行拉普拉斯变换的原函数 $f(t)$ 的象函数 $F(s)$ 一般可以用 e^{-st} 乘 $f(t)$, 然后从 $t=0$ 到 $t=\infty$ 积分这个乘积来得到. 但当我们掌握了拉普拉斯变换的一些基本性质之后,

就不需要每次都这样做了，我们能够根据一些拉普拉斯变换的基本性质推导出更加复杂的函数的拉普拉斯变换，而且通常可以查阅拉普拉斯变换表找到给定原函数 $f(t)$的象函数 $F(s)$.

§2 拉普拉斯变换的基本性质

拉普拉斯变换有一系列重要的性质，这里我们只介绍在常系数线性微分方程（组）应用中几个简单而基本的拉普拉斯变换的性质.

1. 线性性质 如果函数 $f(t)$和 $g(t)$是原函数，α 和β 是任意两个(复)常数,则有关系式:

$$\mathscr{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha\mathscr{L}[f(t)]+\beta\mathscr{L}[g(t)] \tag{8}$$

利用拉普拉斯积分(1),容易直接验证这关系式. 根据这个性质,我们可以推导出一系列函数的拉普拉斯变换.

例 5 如果原函数 $f(t)$是复值函数,$f(t)=u(t)+iv(t)$，其中 u, v 是实的,则由线性性质立即得到

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[u(t)+iv(t)]=\mathscr{L}[u(t)]+i\mathscr{L}[v(t)]$$

现设 s 为实数,那么，由定义，显然实值函数的拉普拉斯变换对实的 s 是实的，因此$\mathscr{L}[u(t)]$是 $\mathscr{L}[f(t)]$的实部，而$\mathscr{L}[v(t)]$ 是$\mathscr{L}[f(t)]$的虚部. 现在假设 $f(t)=e^{zt}$,其中 $z=\lambda+i\omega$,这里 λ, ω 是实数,则由线性性质有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[e^{zt}]&=\mathscr{L}[e^{\lambda t}\cdot e^{i\omega t}]=\mathscr{L}[e^{\lambda t}\cos\omega t+ie^{\lambda t}\sin\omega t]\\&=\mathscr{L}[e^{\lambda t}\cos\omega t]+i\mathscr{L}[e^{\lambda t}\sin\omega t]\end{aligned}$$

另一方面由(4)式知道，当 $\mathrm{Re}s>\mathrm{Re}z$，亦即 $s>\lambda$(因假设 s 为实数)时

$$\mathscr{L}[e^{zt}]=\frac{1}{s-z}=\frac{1}{s-\lambda-i\omega}=\frac{s-\lambda+i\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$$

因此

$$\mathscr{L}[e^{\lambda t}\cos\omega t]+i\mathscr{L}[e^{\lambda t}\sin\omega t]=\frac{s-\lambda+i\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$$

如果对实的 s 比较上式的实部和虚部便得到

$$\mathscr{L}[e^{\lambda t}\cos\omega t]=\frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}[e^{\lambda t}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$$

我们指出，上两式对复的 s 仍然是成立的，即有

$$\mathscr{L}[e^{\lambda t}\cos\omega t]=\frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}\qquad(\mathrm{Re}s>\lambda)\qquad(9)$$

$$\mathscr{L}[e^{\lambda t}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}\qquad(\mathrm{Re}s>\lambda)\qquad(10)$$

特别地取 $\lambda=0$ 便有

$$\mathscr{L}[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}\qquad(\mathrm{Re}s>0)\qquad(11)$$

$$\mathscr{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\qquad(\mathrm{Re}s>0)\qquad(12)$$

注意，$\omega=1$ 时(12)式就变为(7)式. 因而在这里以及下面某些类似的拉普拉斯变换公式的推导过程中，可以先假定 s 是实的，然后在所得结果中再假设 s 是复的，这样便使得拉普拉斯变换公式的推导显得简明方便(可参阅 F. Brauer 和 J. A. Nohel 著：《Ordinary Differential Equations: a *first* course》(1973年)第十章).

例 6 计算双曲函数 $\mathrm{sh}\omega t$, $\mathrm{ch}\omega t$ 的拉普拉斯变换. 由线性性质及(4)式立即得到

$$\mathscr{L}[\mathrm{sh}\omega t]=\mathscr{L}\left[\frac{1}{2}e^{\omega t}-\frac{1}{2}e^{-\omega t}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\mathscr{L}[e^{\omega t}]-\frac{1}{2}\mathscr{L}[e^{-\omega t}]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega}-\frac{1}{s+\omega}\right)$$

$$=\frac{\omega}{s^2-\omega^2} \qquad (\mathrm{Re}s>|\omega|) \tag{13}$$

类似地有

$$\mathscr{L}[\mathrm{ch}\omega t]=\frac{s}{s^2-\omega^2} \qquad (\mathrm{Re}s>|\omega|) \tag{14}$$

注意，这里ω是实的．如果ω取为复数时，(13)和(14)式亦成立，但此时要求 $\mathrm{Re}s>|\mathrm{Re}\omega|$，因为需同时要求 $\mathrm{Re}s>\mathrm{Re}\omega$ 和 $\mathrm{Re}s>-\mathrm{Re}\omega$.

2. 原函数的微分性质 如果原函数 $f(t)$的一阶导数$f'(t)$或更一般地直至 n 阶导数 $f^{(n)}(t)$都是原函数，则有

$$\mathscr{L}[f'(t)]=s\mathscr{L}[f(t)]-f(0) \tag{15}$$

或

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^n\mathscr{L}[f(t)]-s^{n-1}f(0)$$
$$-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0) \tag{16}$$

如果 $f^{(k)}(t)$在 $t=0$ 处不连续，则 $f^{(k)}(0)$理解为右极限值

$$\lim_{t\to 0+}f^{(k)}(t).$$

事实上，我们只要应用拉普拉斯变换的定义及分部积分法，立即得到

$$\mathscr{L}[f'(t)]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}f'(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\mathrm{e}^{-st}f'(t)\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-st}f(t)\Big|_0^T+\int_0^T s\mathrm{e}^{-st}f(t)\,dt\right]$$

$$=-f(0)+s\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)\,dt$$

$$=s\mathscr{L}[f(t)]-f(0)$$

这里我们用到下面事实：由于假设 $f(t)$是原函数，即 $f(t)$满足不等式(5)，故对 $\mathrm{Re}s>\sigma\geqslant 0$ 有

$$\lim_{T\to\infty} e^{-sT} f(T) = 0$$

运用公式(15)两次，便得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f''(t)] &= s\mathscr{L}[f'(t)] - f'(0) \\ &= s\{s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)\} - f'(0) \\ &= s^2\mathscr{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

如此类推便可得到一般公式(16).

特别地如果 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$，则

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathscr{L}[f(t)]$$

由此看出，对原函数的微分运算，通过拉普拉斯变换便转化为用 s 乘它的象函数的乘法运算，显然对象函数的代数运算比对原函数的微分运算来得简单，这正是我们之所以借助拉普拉斯变换来解常系数线性微分方程(组)初值问题的原因所在.

3. 象函数的微分性质 如果 $F(s)$是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，则 $F(s)$作为 s 的函数有

$$F'(s) = -\int_0^\infty t e^{-st} f(t)\,dt$$

或更一般地有

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-st} f(t)\,dt$$

因而如果 $f(t)$是原函数，则对任意正整数 n，$t^n f(t)$也是原函数，而且

$$\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathscr{L}[f(t)] \tag{17}$$

关于这个性质的详细论证可参看有关专著. 利用这个性质容易推导出在常系数线性微分方程(组)的应用中常遇到的一些函数的拉普拉斯变换.

事实上，如果在(17)式中令 $f(t) = 1$，则由(3)式立即得到

$$\mathscr{L}[t^n]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{n!}{s^{n+1}}\qquad (\mathrm{Re}s>0)\qquad (18)$$

又如果在(17)中令 $f(t)=\mathrm{e}^{zt}$(z 是复数),则由(4)式得到:

$$\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{zt}]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-z}\right)$$

$$=\frac{n!}{(s-z)^{n+1}}\qquad (\mathrm{Re}s>\mathrm{Re}z)\qquad (19)$$

再令 $z=\lambda+\mathrm{i}\omega$,并取变换结果的实部和虚部,便得到①:

$$\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\omega t]=\frac{n!\mathrm{Re}[(s-\lambda)+\mathrm{i}\omega]^{n+1}}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^{n+1}}\quad (\mathrm{Re}s>\lambda)\quad (20)$$

$$\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t]=\frac{n!\mathrm{Im}[(s-\lambda)+\mathrm{i}\omega]^{n+1}}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^{n+1}}\quad (\mathrm{Re}s>\lambda)\quad (21)$$

特别取 $\lambda=0$ 便有

$$\mathscr{L}[t^n\cos\omega t]=\frac{n!\mathrm{Re}(s+\mathrm{i}\omega)^{n+1}}{(s^2+\omega^2)^{n+1}}\qquad (\mathrm{Re}s>0)\qquad (22)$$

$$\mathscr{L}[t^n\sin\omega t]=\frac{n!\mathrm{Im}(s+\mathrm{i}\omega)^{n+1}}{(s^2+\omega^2)^{n+1}}\qquad (\mathrm{Re}s>0)\qquad (23)$$

在(20),(21),(22),(23)中计算出所示的实部和虚部,便可得到这些拉普拉斯变换的明显表达式,例如当 $n=1$ 时,从(22)、(23)立即得到:

$$\mathscr{L}[t\cos\omega t]=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\qquad (\mathrm{Re}s>0)\quad (24)$$

$$\mathscr{L}[t\sin\omega t]=\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}\qquad (\mathrm{Re}s>0)\quad (25)$$

从(20)、(21)立即得到:

$$\mathscr{L}[t\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\omega t]=\frac{(s-\lambda)^2-\omega^2}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}\qquad (\mathrm{Re}s>\lambda)\qquad (26)$$

$$\mathscr{L}[t\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t]=\frac{2\omega(s-\lambda)}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}\qquad (\mathrm{Re}s>\lambda)\qquad (27)$$

---

① 我们再次指出:为了实现这些计算可以先假定 s 是实的,然后在得到的答案中再假设 s 是复的.

§ 3 拉普拉斯反变换

在运用拉普拉斯变换法求解常系数线性微分方程(组)时，我们要碰到如何根据象函数 $F(s)$去求原函数 $f(t)$ 的问题，这种由复变数表达式 $F(s)$ 去推导出时间变数表达式 $f(t)$ 的数学运算，叫做**拉普拉斯反变换**. 一般记拉普拉斯反变换的符号为 $\mathscr{L}^{-1}$，因而

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$$

根据有关专著(例如参阅 M. A. 拉甫伦捷夫, Б. A. 沙巴特著，施祥林，夏定中译，《复变函数论方法》(下册)(人民教育出版社)第六章“运算法和它的应用”)知道，通过 $F(s)$可由如下积分求出 $f(t)$:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds \qquad (t>0) \tag{28}$$

式中 $c=\mathrm{Re}s>\sigma$($\sigma\geqslant 0$ 为实常数)，称为**收敛横坐标**.

直接计算由(28)给出的积分是比较复杂的，要用到有关复变函数论方面的知识；但在具体运用拉普拉斯变换解常系数线性微分方程(组)时往往可以不必去求这个积分，只要直接运用拉普拉斯变换表就够了. 当所研究的变换式子 $F(s)$ 不能在拉普拉斯变换表中找到时，一般地，也只要运用部分分式展开法，将 $F(s)$写成那些已知的拉普拉斯反变换的 s 的简单函数即可.

如果 $f(t)$的拉普拉斯变换 $F(s)$已经分解为下列分量:

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_n(s)$$

并假定 $F_1(s)$, $F_2(s)$, …, $F_n(s)$的拉普拉斯反变换可以容易地求出那，么

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[F(s)]&=\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]+\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)]+\cdots+\mathscr{L}^{-1}[F_n(s)]\\&=f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_n(t)\end{aligned}$$

其中 $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t)$分别是 $F_1(s)$, $F_2(s)$, …, $F_n(s)$ 的拉

普拉斯反变换.

在应用拉普拉斯变换法求解高阶常系数非齐线性微分方程时,$F(s)$常有如下形式:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$$

式中 $A(s)$和 $B(s)$是 s 的多项式, 一般情况下, $B(s)$的阶次不高于 $A(s)$的阶次(如果不是这样, 则分子 $B(s)$必须用分母 $A(s)$去除, 最后得到一个 s 的多项式和一个分子的阶次低于分母阶次的真分式之和), 此时, 我们若能将 $A(s)$分解成因式, 则应用部分分式展开法将 $F(s)$展开成部分分式的形式, 使 $F(s)$ 的每一项分式都是 s 的简单函数, 再利用拉普拉斯变换表即能求出 $F(s)$ 的反变换了.

例 7 求

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

的拉普拉斯的反变换.

利用部分分式展开法, $F(s)$可展开为

$$F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

于是由拉普拉斯变换表立即查得

$$\begin{aligned} f(t)&=\mathscr{L}^{-1}[F(s)] \\ &=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \\ &=2e^{-t}-e^{-2t} \quad (t\geqslant 0) \end{aligned}$$

例 8 求

$$F(s)=\frac{s^2-5s+5}{(s-1)(s-2)^2}$$

的拉普拉斯反变换.

$F(s)$的部分分式展开式为

$$F(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{(s-2)^2}$$

于是

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]\\&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]\\&=\mathrm{e}^t-t\mathrm{e}^{2t}\end{aligned}$$

最后我们要指出：并不是任意函数 $F(s)$ 都能作为象函数的，这与不是任意函数 $f(t)$都能作为原函数一样．也就是说，一个函数 $f(t)$或 $F(s)$ 能作为原函数或象函数都是有条件的．不过，在我们讨论拉普拉斯变换法应用于求解常系数线性微分方程(组)的初值问题时，总是假设所考虑的象函数或原函数是存在的，而且，当原函数 $f(t)$确定后，根据(2)式，象函数就可唯一确定；反之，对一个给定的象函数 $F(s)$，只有唯一的一个原函数和它对应，使关系式(2)成立．因此，原函数和象函数是一一对应的．

为方便应用起见，现将求解常系数线性微分方程(组)的初值问题时经常遇到的拉普拉斯变换列成一简表如下．

拉普拉斯变换表

序号	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)dt$	$F(s)$ 的定义域
1	1	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}s>0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}s>0$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}s>0$
4	e^{zt}	$\frac{1}{s-z}$	$\mathrm{Re}s>\mathrm{Re}z$
5	$t\mathrm{e}^{zt}$	$\frac{1}{(s-z)^2}$	$\mathrm{Re}s>\mathrm{Re}z$

续前表

序号	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$	$F(s)$ 的定义域
6	$t^n e^{zt}$	$\dfrac{n!}{(s-z)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}s>\mathrm{Re}z$
7	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}s>0$
8	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}s>0$
9	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\mathrm{Re}s>\lvert\omega\rvert$
10	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$\mathrm{Re}s<\lvert\omega\rvert$
11	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\mathrm{Re}s>0$
12	$t\cos\omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\mathrm{Re}s>0$
13	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}s>\lambda$
14	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}s>\lambda$
15	$te^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega(s-\lambda)}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}$	$\mathrm{Re}s>\lambda$
16	$te^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{(s-\lambda)^2-\omega^2}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}$	$\mathrm{Re}s>\lambda$

附录II　边值问题

我们知道，不少物理、力学、工程上的问题，可以归结为求解微分方程的问题；而在解决一个具体问题时，除了微分方程本身以外，还需要一定的定解条件．在前面的讨论中，定解条件为**初始条件**；相应的定解问题称为**初值问题**，它可表述为：已知运动在初始时刻的状态，探求运动的规律．但是，有很多实际问题却不能这样表述，它们虽然也可以归结为求解微分方程的问题，而定解条件却分别在所考虑区间的两端给出，这种定解条件称为**边界条件**，相应的定解问题就称为**边值问题**．在本附录里，我们将从一个实例出发，引出常微分方程边值问题的基本概念，并以二阶方程为例，讨论求解边值问题的某些方法和结果．

§1　常微分方程边值问题的概念

在材料力学中，已经知道，在考察梁的横向弯曲问题时，梁的挠度曲线 $y=y(x)$ 满足方程

$$EJy''=M(x) \tag{1}$$

这里 x 是沿梁的长度方向取的坐标，E 为材料的弹性模量，J 为梁横截面的惯性矩，而 M 为作用在相应横截面上的弯矩．

我们又知道

$$\frac{dM}{dx}=Q(x) \tag{2}$$

为作用在相应横截面上的剪力；而

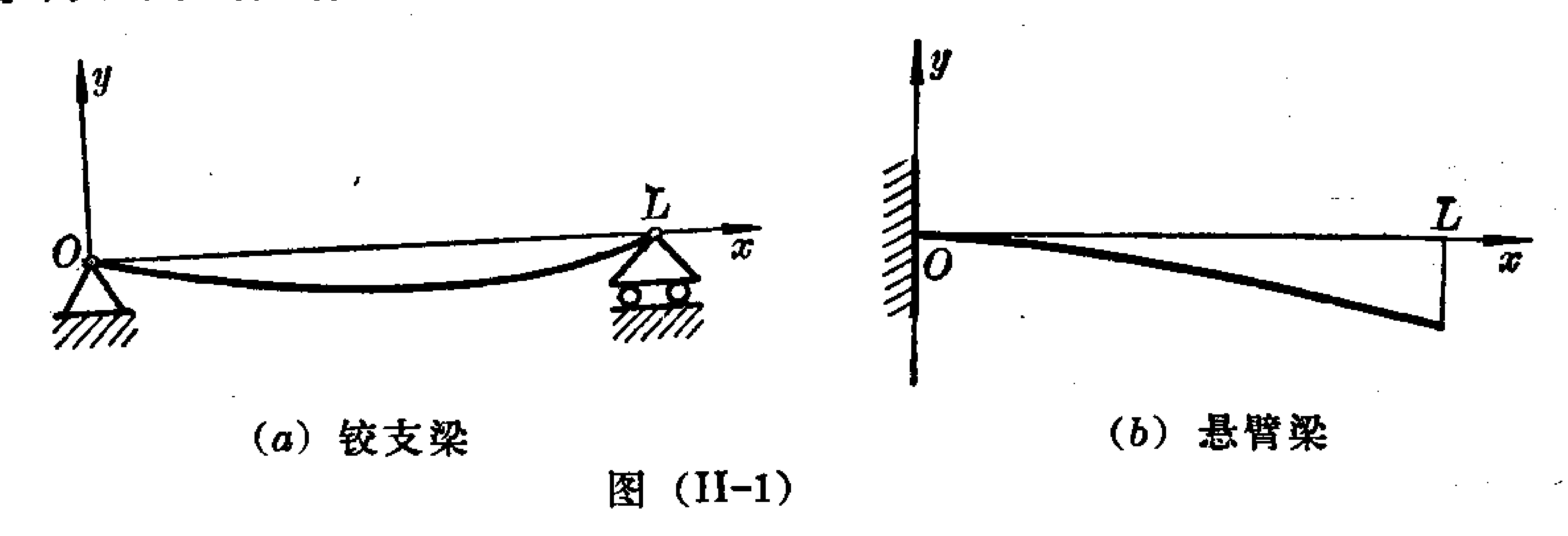
$$\frac{dQ}{dx}=q(x) \tag{3}$$

为在 x 点的载荷密度——单位长度上的载荷．利用(2)、(3)两式，就可以将(1)化为

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2y}{dx^2}\right)=q(x) \tag{4}$$

这就是当梁上的分布载荷密度 $q(x)$ 为已知时，梁的挠度曲线 $y=y(x)$ 所应满足的微分方程.

很明显，对于用不同方式支承的梁，例如铰支梁与悬臂梁（图(II-1)(a)、(b)）在同样的载荷条件下，其弯曲情况是完全不同的. 因此为了确定梁的挠度曲线，所需要的定解条件应根据不同的支承方式来给出.



(a) 铰支梁　　　　(b) 悬臂梁

图 (II-1)

例如，对铰支梁来说，它在两端点的位移及弯矩应为零，故其相应的定解条件应为

$$x=0: \quad y=0 \quad M=0$$

$$x=L: \quad y=0 \quad M=0$$

其中 L 为梁的长度. 利用(1)，它可以写为

$$\begin{cases} x=0: & y=y''=0 \\ x=L: & y=y''=0 \end{cases} \tag{5}$$

而对悬臂梁来说，其一端嵌固（位移及转角为零），另一端为自由（弯矩及剪力为零），故其相应的定解条件为

$$x=0: \quad y=0 \quad y'=0$$

$$x=L: \quad M=0 \quad Q=0$$

利用(1)、(2)式，它可改写为

$$\begin{cases} x=0: & y=y'=0 \\ x=L: & y''=y'''=0 \end{cases} \tag{6}$$

在这里问题就归结为微分方程的边值问题，即在边界条件(5)或(6)之下求解常微分方程(4).

现以二阶线性常微分方程的边值问题为例来进行讨论. 对于高阶常微分方程或方程组的边值问题，通常也可以类似地处理.

一般的二阶线性常微分方程可写为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{7}$$

其中 $y=y(x)$ 为未知函数，而 $p(x)$，$q(x)$，$f(x)$ 均为已知连续函数.

如果在求解区间 $[a,b]$ 的两端点给定边界条件

$$x=a: \qquad y=\alpha$$

$$x=b: \qquad y=\beta$$

其中 α、β 为已知常数，通常又简便地写为如下形式

$$y(a)=\alpha, \quad y(b)=\beta \tag{8}$$

则由方程(7)和边界条件(8)便组成一个二阶常微分方程的边值问题，简称为边值问题(7)、(8).

解边值问题(7)、(8)，或者说求边值问题(7)、(8)的解 $y=y(x)$，就是寻找微分方程(7)的解 $y=y(x)$ 使得它满足边界条件(8). 从几何上看就相当于在 xy 平面上寻找一条曲线 $y=y(x)$，使它通过 (a,α) 和 (b,β) 两点，并在区间 (a,b) 内满足微分方程(7)(见图(II-2)).

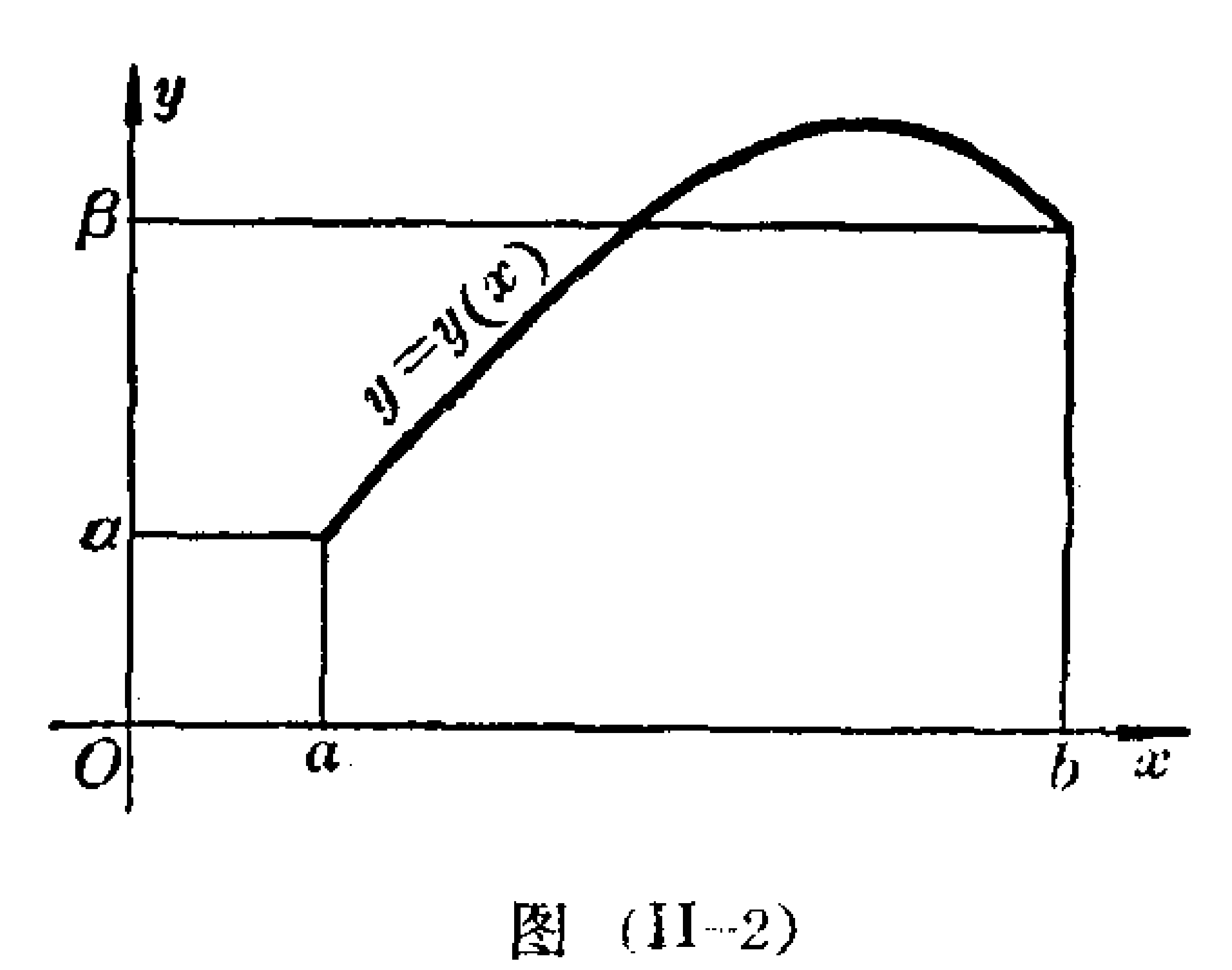


图 (II-2)

除了形如(8)的边界条件外，在应用上还有其他各种类型的边界条件．例如在求解区间$[a,b]$的两端点给出一阶微商y'之值:

$$y'(a)=A,\quad y'(b)=B \tag{9}$$

或者给出y与y'的线性组合:

$$k_1y(a)+k_2y'(a)=A,\quad k_1y(b)+k_2y'(b)=B \tag{10}$$

其中A、B、k_1、k_2是常数．还有周期边界条件:

$$y(a)=y(b),\quad y'(a)=y'(b) \tag{11}$$

等等．更一般地，可把(8)—(11)式合并写为

$$U_i[y]\equiv\alpha_{i0}y(a)+\beta_{i0}y(b)+\alpha_{i1}y'(a)+\beta_{i1}y'(b)=\gamma_i \tag{12}$$

$$(i=1,2)$$

其中α_{ij}, β_{ij}, γ_i $(i=1,2,\ j=0,1)$是常数．

如果微分方程(7)和边界条件(12)都是齐次的，即$f(x)=0$, $\gamma_i=0\ (i=1,2)$，则边值问题称为**齐次的**；在其他任何情况下，即只要$f(x)$, γ_1, γ_2其中有一个不为零，则边值问题称为**非齐次的**．

和初值问题一样，边值问题同样有关于解的存在与唯一性的问题．先看如下两个简单的例子．

例1 考虑边值问题

$$\begin{cases} y''+y=0 & (13)\\ y(0)=0,\ y(\pi)=1 & (14)\end{cases}$$

由于方程(13)的通解为

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x \tag{15}$$

其中c_1, c_2是任意常数．容易看到，不论c_1, c_2取怎样的数值，都不能使此解同时满足(14)中的两个边界条件．事实上，如果将条件$y(0)=0$代入通解(15)，可得$c_1=0$，而由条件$y(\pi)=1$得到$c_1=-1$．这两个结果互相矛盾，因此边值问题(13)、(14)无解．

例2 考虑边值问题

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & (13) \\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0 & (16) \end{cases}$$

容易看出，将边界条件(16)代入方程(13)的通解(15)，只能定出 $c_1 = 0$，于是边值问题(13)、(16)有无穷多个解

$$y = c_2 \sin x$$

其中 c_2 是任意常数.

我们注意，对于初值问题：

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

来说，只要函数 $f(x, y, y')$ 及其偏导数 $f'_y(x, y, y')$ 和 $f'_{y'}(x, y, y')$ 连续，解总是存在而且唯一的. 但是对同样方程的边值问题：

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha,\quad y(b) = \beta \end{cases}$$

来说，正如在例 1、例 2 所看到的，即使函数 f 及其有关偏导数连续，还不能保证解的存在唯一，因此边值问题的存在唯一性要比初值问题的复杂. 这里不作更多的讨论，我们只对二阶线性常微分方程的边值问题指出如下结论.

定理 1　如果已知非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{7}$$

的一个解 $y_0(x)$，以及对应齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{17}$$

的基本解组 $y_1(x), y_2(x)$，则边值问题(7)、(12)可解的充分必要条件是：矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[y_0] - \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[y_0] - \gamma_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

和矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix} \tag{19}$$

具有相同的秩．而边值问题(17)、(12)可解的充分必要条件是矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & \gamma_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

与矩阵(19)具有相同的秩．而且边值问题有唯一非平凡解的充分必要条件是这些矩阵的秩均等于 2.

证明并不很难，请读者自行证明之.

最后我们约定，在下面的讨论中，总是假设所考虑的边值问题的解是存在且唯一的.

§2 边值问题的某些解法

首先介绍一个求解边值问题较为常用的方法——待定常数法．如果对边值问题中所考虑的微分方程的通解可以求出，则利用给定的边界条件确定其中的任意常数，便可求得所讨论的边值问题的特解，这种方法称为**待定常数法**.

例 3 求解边值问题

$$\begin{cases} y''=0 & (21) \\ y(0)=\alpha, \quad y(1)=\beta & (22) \end{cases}$$

其中 α, β 是给定的常数，由于方程(21)有通解 $y=c_1+c_2x$，以边界条件(22)代入得到

$$c_1=\alpha, \quad c_1+c_2=\beta \tag{23}$$

即得 $c_1=\alpha, c_2=\beta-\alpha$，因此求出边值问题(21)、(22)的解为

$$y=\alpha+(\beta-\alpha)x \tag{24}$$

例 4 考虑均布载荷的铰支梁(参阅图(II-1)(*a*))．这时作用在梁上的载荷密度为常数 q_0．假设载荷作用向下，梁的挠度曲线

将向上凹如图(II-1)(a)，则确定均布载荷的铰支梁的挠度曲线问题便化为求解边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dx^2}\left(EJ\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)=-q_0 & (25)\\ y(0)=y''(0)=y(L)=y''(L)=0 & (26)\end{cases}$$

对方程(25)连续积分四次即得其通解：

$$EJy=-\frac{1}{24}q_0x^4+\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{2}c_2x^2+c_3x+c_4$$

由边界条件(26)可定出

$$c_1=\frac{1}{2}q_0L,\quad c_2=0,\quad c_3=-\frac{1}{24}q_0L^3,\quad c_4=0$$

于是得到梁的挠度曲线为

$$y=-\frac{q_0}{24EJ}(x^4-2Lx^3+L^3x)$$

从上述例子看到，运用待定常数法关键在于求出所考虑的微分方程的通解．我们知道，对于二阶齐线性方程，如果能找出它的两个线性无关的特解，那么它们的线性组合就是方程的通解．而这两个线性无关的特解又可以通过求解两个特殊的初值问题而得到，因此为了求解边值问题可以先通过求解初值问题求出通解，然后再通过待定常数法进行求解．

先考虑二阶齐线性方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0\qquad(a\leqslant x\leqslant b)\tag{17}$$

满足边界条件

$$y(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta\tag{8}$$

的边值问题．首先设法求出方程(17)的两个特解 $y_1(x)$, $y_2(x)$，使得 $y_1(x)$满足初始条件

$$y_1(a)=1,\quad y_1'(a)=0\tag{27}$$

而 $y_2(x)$满足初始条件

$$y_2(a)=0,\quad y_2'(a)=1 \tag{28}$$

显然，这两个解 $y_1(x)$，$y_2(x)$是线性无关的．则根据定理 1，当 $\alpha\neq 0$ 或 $\beta\neq 0$ 时，边值问题(17)、(8)有唯一非平凡解的充分必要条件是 $y_2(b)\neq 0$.

事实上，我们可构造出方程(17)的通解有形式

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \tag{29}$$

令它满足边界条件(8)得到

$$c_1y_1(a)+c_2y_2(a)=\alpha$$

$$c_1y_1(b)+c_2y_2(b)=\beta$$

再利用(27)和(28)式，当 $y_2(b)\neq 0$ 时可解出

$$c_1=\alpha,\ \ c_2=\frac{\beta-\alpha y_1(b)}{y_2(b)}$$

于是得到边值问题(17)、(8)的解为

$$y(x)=\alpha y_1(x)+\frac{\beta-\alpha y_1(b)}{y_2(b)}y_2(x) \tag{30}$$

现在考虑二阶非齐线性方程

$$y''+p(x)y'+q(x)=f(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{7}$$

满足边界条件(8)的边值问题．利用前面类似的方法，只要设法求得非齐次方程(7)的一个特解 $y_0(x)$，使它满足初始条件

$$y_0(a)=\alpha,\quad y_0'(a)=0$$

并求出相应的齐次方程(17)的一个特解 $y_1(x)$，使其满足初始条件

$$y_1(a)=0,\quad y_1'(a)=1$$

则当 $y_1(b)\neq 0$ 时，我们可求得边值问题(7)、(8)的解为

$$y(x)=y_0(x)+\frac{\beta-y_0(b)}{y_1(b)}y_1(x) \tag{31}$$

例 5 求解边值问题

$$\begin{cases} y''+\dfrac{4x}{1+x^2}y'+\dfrac{2}{1+x^2}y=0 & (32)\\ y(0)=1,\quad y(2)=1 & (33)\end{cases}$$

容易验证方程(32)有两个线性无关解

$$y_1(x)=\frac{1}{1+x^2}, \quad y_2(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

分别满足初始条件

$$y_1(0)=1, \quad y_1'(0)=0$$
$$y_2(0)=0, \quad y_2'(0)=1$$

注意 $y_2(2)=\frac{2}{5}\neq 0$，利用公式(30)立即得到边值问题(32)、(33)的解为

$$y=\frac{1+2x}{1+x^2}$$

例 6 求解边值问题

$$\begin{cases} y''+3y=\cos x & (34) \\ y(0)=\frac{1}{2}, \ y(\pi)=-\frac{1}{2} & (35) \end{cases}$$

显然 $y_0(x)=\frac{1}{2}\cos x$ 是方程(34)满足初始条件

$$y_0(0)=\frac{1}{2}, \quad y_0'(0)=0$$

的一个特解，另外容易知道相应的齐次方程

$$y''+3y=0$$

有一个解 $y_1(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x$，满足初始条件

$$y_1(0)=0, \quad y_1'(0)=1$$

而且 $y_1(\pi)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\pi\neq 0$，因此根据公式(31)立即得到边值问题(34)、(35)的解为

$$y=\frac{1}{2}\cos x$$

另外，我们已经知道（参阅第五章 5.2.2），利用常数变易法，

可求得非齐线性方程(7)有如下形式的通解

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\int_a^x\frac{y_2(x)y_1(t)-y_1(x)y_2(t)}{W(t)}f(t)dt \tag{36}$$

其中 $y_1(x)$, $y_2(x)$是对应齐次方程(17)的分别满足初始条件(27)和(28)的基本解组，而$W(x)$是 $y_1(x)$、$y_2(x)$的伏朗斯基行列式

$$W(x)\equiv\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$$

先考虑齐次边界条件

$$y(a)=0,\quad y(b)=0 \tag{37}$$

我们希望(36)满足边界条件(37)，由条件 $y(a)=0$ 得知 $c_1=0$，再由条件 $y(b)=0$ 给出

$$c_2y_2(b)+\int_a^b\frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)dt=0 \tag{38}$$

从定理 1 可知，为使边值问题(7)、(37)存在唯一的非平凡解，必须且仅须 $y_2(b)\neq0$，此时由(38)解出

$$c_2=-\frac{1}{y_2(b)}\int_a^b\frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)dt$$

从而代入(36)并经过一些演算便可得到：

$$\begin{aligned}y(x)=&-\frac{y_2(x)}{y_2(b)}\int_a^b\frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)dt\\&+\int_a^x\frac{y_2(x)y_1(t)-y_1(x)y_2(t)}{W(t)}f(t)dt\\=&-\frac{y_2(x)}{y_2(b)}\int_x^b\frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)dt\\&-\frac{y_2(x)}{y_2(b)}\int_a^x\frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)dt\\&+\int_a^x\frac{y_2(x)y_1(t)-y_1(x)y_2(t)}{W(t)}f(t)dt\end{aligned}$$

$$=\int_x^b \frac{y_2(x)f(t)}{y_2(b)W(t)}[y_2(t)y_1(b)-y_1(t)y_2(b)]dt$$
$$+\int_a^x \frac{y_2(t)f(t)}{y_2(b)W(t)}[y_2(x)y_1(b)-y_1(x)y_2(b)]dt$$

为方便起见，定义函数

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{y_2(t)}{y_2(b)W(t)}[y_2(x)y_1(b)-y_1(x)y_2(b)] & a\leqslant t\leqslant x\\ \dfrac{y_2(x)}{y_2(b)W(t)}[y_2(t)y_1(b)-y_1(t)y_2(b)] & x\leqslant t\leqslant b\end{cases}$$

则边值问题(7)、(37)的解即可写为如下简便形式:

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)dt\quad (a\leqslant x\leqslant b)\tag{39}$$

于是得到如下重要的结果:

定理 2 如果齐次方程(17)存在基本解组 $y_1(x)$, $y_2(x)$, 且 $y_2(b)\neq 0$, 则对每一个在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续的函数 $f(x)$, 非齐次边值问题(7)、(37)都存在唯一解，并且这个解 $y(x)$ 可由公式(39)唯一确定.

公式(39)中的 $G(x,t)$ 称为边值问题(7)、(37)的格林函数，它具有如下性质:

i) $G(x,t)$ 在正方形 $a\leqslant t, x\leqslant b$ 上连续;

ii) $\dfrac{\partial G(x,t)}{\partial x}$ 在 $a\leqslant t, x\leqslant b$ 上连续 $(x\neq t)$;

iii) $G(x,t)$ 对每一个固定的 t, 作为 x 的函数 $(x\neq t)$ 满足齐次方程 (17); 而对每个固定的 x, 作为 t 的函数满足边界条件 (37).

上述性质可由 $G(x,t)$ 的表达式直接验证，这里从略.

例 7 考虑边值问题

$$\begin{cases} y''=f(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b) & (40) \\ y(a)=0, \quad y(b)=0 & (37) \end{cases}$$

其中 $f(x)$在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续，显然 $y_1(x)=1$, $y_2(x)=x-a$ 是齐次方程 $y''=0$ 满足初始条件(27)、(28)的基本解组，因此立即可求得边值问题(40)、(37)的格林函数为：

$$G(x,t)=\begin{cases} \dfrac{(b-x)(a-t)}{b-a} & \text{当 } a\leqslant t\leqslant x \\ \dfrac{(a-x)(b-t)}{b-a} & \text{当 } x\leqslant t\leqslant b \end{cases}$$

最后，应该指出，格林函数是解决非齐次边值问题的有效工具，而且对各种不同类型的方程和边界条件可以推导出各种形式的格林函数，在此不多介绍了。

§3 本征值和本征函数

在边值问题中有一类属于求本征值和本征函数（也称特征值和特征函数）的问题，简称为本征值问题，这类问题在生产实践中具有重要的意义．事实上，与振动有关的一类物理、力学问题，往往可归结为本征值问题，有些偏微分方程的本征值问题，通过分离变量法，也可以化为常微分方程的本征值问题．在这里我们通过几个例子简单介绍一下边值问题的本征值和本征函数的概念以及一些结果．

例 8 考虑边值问题

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 & (41) \\ y(0)=0, \quad y(\pi)=0 & (42) \end{cases}$$

其中 λ 是参数．

显然边值问题(41)、(42)有零解 $y(x)\equiv 0$．但除零解之外，是否还有非零解呢？也就是说，参数 λ 取什么值时，方程(41)在区间

$0 \leqslant x \leqslant \pi$ 上才有不恒为零的解 $y(x)$，并满足边界条件(42)呢？下面分三种情形来讨论:

1) $\lambda=0$，此时微分方程(41)变为 $y''=0$，其通解为

$$y=c_1x+c_2$$

把边界条件(42)代入，得到 $c_1=c_2=0$，因此，$y(x)\equiv 0$．这说明当 $\lambda=0$ 时边值问题(41)、(42)没有非零解.

2) $\lambda<0$，令 $\lambda=-\mu^2$，这样微分方程(41)变为

$$y''-\mu^2y=0$$

它的通解可写为

$$y=c_1\operatorname{sh}\mu x+c_2\operatorname{ch}\mu x$$

由条件 $y(0)=0$ 得到 $c_2=0$，于是 $y=c_1\operatorname{sh}\mu x$，又由条件 $y(\pi)=0$ 得 $c_1\operatorname{sh}\mu\pi=0$，但当 $\mu\neq 0$ 时 $\operatorname{sh}\mu\pi\neq 0$，因而必须 $c_1=0$，故 $\lambda<0$ 时边值问题(41)、(42)也没有非零解.

3) $\lambda>0$，此时微分方程(41)的通解为

$$y=c_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+c_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

由条件 $y(0)=0$ 知 $c_1=0$，即得 $y=c_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$，又由条件 $y(\pi)=0$ 得 $c_2\sin\sqrt{\lambda}\,\pi=0$，若 $c_2=0$，则 $y(x)\equiv 0$．所以，要有非零解存在，就必须

$$\sin\sqrt{\lambda}\,\pi=0$$

于是

$$\lambda=n^2 \quad (n=\pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{43}$$

与这些 λ 值对应的边值问题(41)、(42)的解为

$$y=c_2\sin nx \quad (n=\pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{44}$$

综合以上讨论得知：当且仅当 $\lambda=n^2(n=\pm 1, \pm 2, \cdots)$时，边值问题(41)、(42)才有非零解．使边值问题(41)、(42)有非零解的这些 λ 值(43)称为边值问题(41)、(42)的**本征值**，与本征值(43)对应的解(44)称为**本征函数**.

例 9 考虑非齐次边值问题

$$\begin{cases} y''+\lambda y=f(x) & (45) \\ y(0)=0,\ y(\pi)=0 & (42) \end{cases}$$

其中 $f(x)$是在 $0\leqslant x\leqslant \pi$ 上的连续函数. 和初值问题相类似,非齐次边值问题(45)、(42)与其对应的齐次边值问题(41)、(42)有紧密的联系, 不过 λ 是否为本征值将会有很大的差别. 下面我们假设 $\lambda>0$.

由常数变易法(参阅第四章 4.1.3)求得非齐线性方程(45) 的通解为

$$y(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x f(t)\sin\sqrt{\lambda}(x-t)dt \quad (46)$$

我们希望解(46)能满足边界条件(42), 由条件 $y(0)=0$ 得知 $c_1=0$, 再由条件 $y(\pi)=0$ 给出

$$c_2\sin\sqrt{\lambda}\pi+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\pi f(t)\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)dt=0 \quad (47)$$

对于给定的 λ, 如果 $\sin\sqrt{\lambda}\pi\neq 0$, 则由 (47) 可唯一地确定出常数 c_2:

$$c_2=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}\int_0^\pi f(t)\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)dt$$

从而由(46)得到

$$y(x)=-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}\int_0^\pi f(t)\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x f(t)\sin\sqrt{\lambda}(x-t)dt \quad (48)$$

我们注意: 条件 $\sin\sqrt{\lambda}\pi\neq 0$ 就相当于 λ 不是齐次边值问题(41)、(42)的本征值(参看例 8).

下面分两种情形来讨论:

1° 如果 $\lambda=\lambda^*$ 是齐次边值问题 (41)、(42) 的本征值, 即 $\sin\sqrt{\lambda^*}\pi=0$, 因而 $\lambda^*=n^2(n=\pm1, \pm2, \cdots)$, 则对任意选择的 c_2, (47)成立的充分必要条件是

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin\sqrt{\lambda^*}(\pi-t)\,dt=0$$

或等价地

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin\sqrt{\lambda^*}t\,dt=0 \tag{49}$$

此时解(46)就变为

$$y(x)=c_2\sin\sqrt{\lambda^*}x+\frac{1}{\sqrt{\lambda^*}}\int_0^{x} f(t)\sin\sqrt{\lambda^*}(x-t)\,dt$$

其中 c_2 是任意常数,且不能由边界条件来确定.因此, 如果 $\lambda=\lambda^*$ 是齐次边值问题 (41)、(42) 的本征值, 则非齐次边值问题(45)、(42)就不能有唯一的解. 若条件(49)满足, 它有无穷多个解;若条件(49)不满足,它便没有解.

2° 如果 λ 不是齐次边值问题(41)、(42)的本征值,则由(48)给出的非齐次边值问题(45)、(42) 的解 $y(x)$是唯一的. 事实上, 假定 $z(x)$是非齐线性方程(45)满足边界条件(42)的另一个解, 则 $y(x)-z(x)$是齐次方程(41)的解,且满足边界条件(42), 因而, 如果 $y(x)-z(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上不恒等于零, λ 就是齐次边值问题(41)、(42)的本征值,这与假设相矛盾.

此时, $\lambda\neq n^2(n=\pm1, \pm2, \cdots)$(参阅例 8), 现在我们把唯一解(48)改写为

$$\begin{aligned}y(x)=&\int_0^{x}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}f(t)\,dt\\&-\int_0^{x}\frac{\sin\sqrt{\lambda}x\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}f(t)\,dt\\&-\int_x^{\pi}\frac{\sin\sqrt{\lambda}x\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}f(t)\,dt\end{aligned}$$

由于

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}$$
$$=-\frac{\sin\sqrt{\lambda}t\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}$$

上式可以统一写为

$$y(x)=\int_0^\pi G(x,t,\lambda)f(t)dt \quad (0\leqslant x\leqslant\pi) \tag{50}$$

其中

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}-\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi} & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant x\\ -\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi} & \text{当 } x\leqslant t\leqslant\pi\end{cases}$$

$(50)_1$

就是非齐次边值问题(45)、(42)的格林函数，它是对于 $0\leqslant t, x\leqslant\pi$ 和 $\lambda\neq n^2(n=\pm1, \pm2, \cdots)$定义的连续函数；而且 $\dfrac{\partial G(x,t,\lambda)}{\partial x}$对 $x\neq t$ 是连续的；$G(x,t,\lambda)$ 对每一个固定的 t，作为 x 的函数($x\neq t$)，满足齐次方程(41)，而对每个固定的 x，作为 t 的函数满足边界条件(42)(参阅定理 2).

例 10 求解边值问题

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0 & (41)\\ y(0)=\alpha, y(\pi)=\beta & (51)\end{cases}$$

这里边界条件(51)是非齐次的，其中 α, β 是给定的常数. 我们可以把这问题化为在例 9 中讨论过的那类边值问题，其中微分方程为非齐次的，而边界条件是齐次的.

假设 $h(x)$是在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上有二阶连续导数的函数，使得

$$h(0)=\alpha, \quad h(\pi)=\beta$$

例如 $h(x)=\alpha+\frac{(\beta-\alpha)x}{\pi}$就是这样的函数，令

$$y(x)=z(x)+h(x)$$

则 $y'(x)=z'(x)+h'(x), y''(x)=z''(x)+h''(x)$，并且

$$y''(x)+\lambda y(x)=z''(x)+h''(x)+\lambda[z(x)+h(x)]$$

因此边值问题(41)、(51)就化为如下边值问题：

$$\begin{cases}z''+\lambda z=-[h''(x)+\lambda h(x)] & (52)\\ z(0)=0, \quad z(\pi)=0 & (53)\end{cases}$$

那么根据例 9 中的讨论，利用公式(50)即得边值问题(52)、(53)的解为

$$z(x)=\int_0^\pi G(x,t,\lambda)f(t)dt \quad (0\leqslant x\leqslant\pi)$$

而原边值问题(41)、(51)的解即为

$$y(x)=\int_0^\pi G(x,t,\lambda)f(t)dt+h(x) \quad (0\leqslant x\leqslant\pi)$$

其中 $G(x,t,\lambda)$由$(50)_1$给出，又 $f(x)=-[h''(x)+\lambda h(x)]$，如果选择 $h(x)=\alpha+\frac{(\beta-\alpha)x}{\pi}$，则有

$$f(x)=-\lambda\left[\alpha+(\beta-\alpha)\frac{x}{\pi}\right]$$

例 11 求解边值问题

$$\begin{cases}y''+\lambda y=f(x) & (45)\\ y(0)=\alpha, y(\pi)=\beta & (51)\end{cases}$$

我们可以把这问题化为在例 9 及例 10 中所讨论过的两个较简单的问题. 假设 $y_1(x)$ 是具有齐次微分方程的边值问题(41)、(51)的解（例 10），$y_2(x)$是具有齐次边界条件的边值问题（45)、(42)的解(例 9)，如果 λ 不是齐次边值问题(41)、(42)的本征值，则所给边值问题(45)、(51)的解为

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)$$

而且这个解 $y(x)$ 是唯一的. 这个结论的证明留给读者作为练习.

为了研究更一般形式的微分方程的本征值问题,我们引进"自伴本征值问题"的概念.

考虑二阶齐线性微分方程

$$L[y]\equiv p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=\lambda y \tag{54}$$

其中 $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$是在区间$[a,b]$上给定的实的连续函数,且 $p_0(x)\neq 0$, λ 是参数. 如果方程(54) 中的算符 L 具有这样的性质:对于任意两个在区间$[a,b]$上有连续二阶导数并满足一定边界条件的 $u(x)$和 $v(x)$,关系式

$$\int_a^b \bar{u}L[v]dx=\int_a^b v\overline{L[u]}dx \tag{55}$$

(其中上面一横表示复数共轭)成立, 则相应的本征值问题称为**自伴的**. 对于自伴本征值问题有如下基本定理:

定理 3 自伴问题的本征值必是实数①,并且对应于不同本征值的本征函数在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是两两正交的.

证明 设 λ^* 为自伴问题的本征值, $\varphi(x)$为相应的本征函数,即 φ 满足方程 $L[\varphi]=\lambda^*\varphi$, 令$\bar{\lambda}^*$ 和$\overline{\varphi(x)}$分别表示 λ^* 和 $\varphi(x)$ 的共轭复数,则$\overline{L[\varphi]}=\bar{\lambda}^*\bar{\varphi}$, 于是由自伴关系(55) 及 $\varphi\bar{\varphi}=|\varphi|^2$得

$$\int_a^b \bar{\varphi}L[\varphi]dx-\int_a^b \varphi\overline{L[\varphi]}dx$$

$$=(\lambda^*-\bar{\lambda}^*)\int_a^b|\varphi|^2dx=0$$

由本征函数的定义, $|\varphi(x)|^2>0$, 因而$\int_a^b|\varphi|^2dx>0$, 故 $\lambda^*=\bar{\lambda}^*$, 即 λ^*为实数.

---

① 自伴问题的全体本征值构成一个可数集. 要证明这一性质将涉及到微分方程的解析理论, 故在定理 3 中未列入此重要性质. 读者可参阅 E. A. Coddington 和 N. Levinson 著: «Theory of Ordinary Differential Equations» (1955 年)第七章.

设 $\varphi_m(x)$和 $\varphi_n(x)$ 是分别对应于两个不同本征值 λ_m 和 λ_n 的本征函数，由自伴关系式(55)，并注意本征值是实数，得到

$$\int_a^b \bar{\varphi}_m L[\varphi_n]dx - \int_a^b \varphi_n \overline{L[\varphi_m]}dx$$

$$=(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b \bar{\varphi}_m \cdot \varphi_n dx = 0$$

既然 $\lambda_m \neq \lambda_n$，则必有

$$\int_a^b \overline{\varphi_m(x)} \cdot \varphi_n(x) dx = 0$$

故 $\varphi_m(x)$和 $\varphi_n(x)$是正交的.

定理 3 证毕.

例 12 微分方程

$$L[y] \equiv -y'' = \lambda y \tag{41}$$

和边界条件

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \tag{56}$$

($\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 是实常数，且 α_1 和 α_2 不同时为零，β_1 和 β_2 不同时为零)或周期边界条件

$$y(a) - y(b) = 0, \quad y'(a) - y'(b) = 0 \tag{11}$$

组成自伴本征值问题.

事实上，假设 $u(x)$和 $v(x)$是任意两个在区间$[a, b]$上有连续二阶导数并满足边界条件(56)的函数，则对方程(41)中的算符 L 利用分部积分法得到

$$\int_a^b \bar{u} L[v] dx = -\int_a^b \bar{u} v'' dx$$

$$= -(\bar{u} v')\Big|_a^b + \int_a^b \bar{u}' v' dx$$

$$= (\bar{u}' v - \bar{u} v')\Big|_a^b - \int_a^b v \bar{u}'' dx$$

$$= (\bar{u}' v - \bar{u} v')\Big|_a^b + \int_a^b v \overline{L[u]} dx$$

因 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都满足边界条件(56)，故由其中的第一个条件得

$$\alpha_1\bar{u}(a)+\alpha_2\bar{u}'(a)=0$$

$$\alpha_1 v(a)+\alpha_2 v'(a)=0$$

按所设 α_1 和 α_2 不同时为零，例如 $\alpha_1\neq 0$，则有

$$\bar{u}(a)=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\bar{u}'(a)$$

$$v(a)=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}v'(a)$$

即有

$$\begin{aligned}\bar{u}'(a)v(a)-\bar{u}(a)v'(a)&=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}[\bar{u}'(a)v'(a)-\bar{u}'(a)v'(a)]\\&=0\end{aligned}$$

故得到

$$(\bar{u}'v-\bar{u}v')|_{x=a}=0 \tag{57}$$

同样由(56)的第二个条件得到

$$(\bar{u}'v-\bar{u}v')|_{x=b}=0 \tag{58}$$

因此成立

$$\int_a^b \bar{u}L[v]dx=\int_a^b v\overline{L[u]}dx$$

这证明本征值问题(41)、(56)是自伴的．显然问题(41)、(42)是此问题的特殊情形．

对于周期边界条件(11)，容易验证亦有

$$(\bar{u}'v-\bar{u}v')\Big|_b^b=0 \tag{59}$$

故本征值问题(41)、(11)亦是自伴的，于是所考虑的本征值问题有定理 3 所述的结果．

例 13 斯图谟-刘维尔(Sturm-Liouville)型方程

$$L[y]\equiv-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=\lambda y \tag{60}$$

和边界条件(56)或(11)的本征值问题也是自伴的，其中 $p(x)$,$q(x)$ 是在区间[a, b]上不等于零的实连续函数，而对周期边界条件(11)的情形还要求 $p(a)=p(b)$.

类似例 12 中的讨论. 假设 $u(x)$和 $v(x)$是任意两个在区间[a, b]上有连续二阶导数且满足边界条件(56)或(11)的函数，则对方程(60)中的算符 L 有:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \bar{u}L[v]\,dx-\int_a^b v\overline{L[u]}\,dx \\
&=\int_a^b \bar{u}\left[-\frac{d}{dx}(pv')+qv\right]dx-\int_a^b v\left[-\frac{d}{dx}(p\bar{u}')+q\bar{u}\right]dx \\
&=\int_a^b\left[v\frac{d}{dx}(p\bar{u}')-\bar{u}\frac{d}{dx}(pv')\right]dx \\
&=[p(x)(\bar{u}'v-\bar{u}v')]\Big|_a^b
\end{aligned}$$

利用(57)、(58)或(59)立即推知所考虑的本征值问题是自伴的. 特别是勒让德方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0 \tag{61}$$

和边界条件(56)或(11)所组成的本征值问题是自伴的.

最后，我们指出，对更一般形式的边界条件(12)，亦可进行类似的讨论，甚至还可以探讨各种不同类型的本征值问题. 由于篇幅所限，我们就不在此作详细讨论了. 需要深入学习的读者可参阅 F. Brauer 和 J. A. Nohel 著:《Ordinary Differential Equations: A First Course》(1973 年)第七章.

习 题 答 案

（仅供参考）

习 题 1.2

1. (1) 一阶线性；(2) 二阶非线性；(3) 一阶非线性；(4) 二阶线性；(5) 一阶非线性；(6) 二阶非线性.

4. (1) $y=x^2+c$；(2) $y=x^2+3$；(3) $y=x^2+4$；(4) $y=x^2+\frac{5}{3}$.

5. $y=x^2$.

6. $y=0$ 及 $y=x+1$.

8. 一小时.

9. (1) $y'=\frac{y+x\operatorname{tg}\alpha}{x-y\operatorname{tg}\alpha}$；

(2) $\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2+(y-xy')^2=l^2$；

(3) $\left|(y-xy')\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=2a^2$；

(4) $xy'+y=0$；

(5) $y-xy'=x^2$；

(6) $y-xy'=\frac{x+y}{2}$；

(7) $y'=kx$ （$k>0$ 为常数）.

习 题 2.1

1. 通解 $y=ce^{x^2}$；特解 $y=e^{x^2}$.

2. 通解 $y=\frac{1}{c+\ln|1+x|}$；另有解 $y=0$；特解 $y=\frac{1}{1+\ln|1+x|}$.

3. $(1+x^2)(1+y^2)=cx^2$.

4. $x-y+\ln|xy|=c$；$y=0$.

5. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln|\sqrt{x^2+y^2}|=c$.

6. $\arcsin\frac{y}{x}=\ln|x|+c$; $y^2=x^2$.

7. $\sin y\cos x=c$, $y=k\pi$, $k=0, \pm 1, \cdots$.

8. $2e^{3x}-3e^{-y^2}=c$.

9. $1+\ln\frac{y}{x}=cy$.

10. $e^y=e^x+c$.

11. $y=\operatorname{tg}(x+c)-x$.

12. $y=\operatorname{arctg}(x+y)+c$.

13. $x^2-xy+y^2+x-y=c$.

14. $x^2+y^2-2xy+4y+10x=c$.

15. $\operatorname{tg}(6x+c)=\frac{2}{3}(x+4y+1)$.

16. $(y^3-3x)^7(y^3+2x)^3=cx^{15}$.

17. $(y^2-x^2+2)^5=c(x^2+y^2)$.

18. (1) $y=cx\sqrt{x^2y^2+2}$;

(2) $\ln\left|\frac{y}{x}\right|=\frac{1}{4}x^2y^2+c$.

19. $f(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

20. $x(t)=\operatorname{tg}[x'(0)t]$.

21. $y'=-\frac{y}{x}$; $xy=c$.

22. (1) $RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E\,(t=0,\ u_C=0)$; $t=\ln 2$.

(2) $RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0\,(t=0,\ u_C=E)$; $t=\ln 2$.

23. $r=ce^\theta$ $(x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)$.

习 题 2.2

1. $y=ce^x-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$.

2. $x = ce^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}$.

3. $s = ce^{-\sin t} + \sin t - 1$.

4. $y = x^n(e^x + c)$.

5. $y = x^2(1 + ce^{\frac{1}{x}})$.

6. $y^3 = x^3(3x + c)$.

7. $2y = c(x+1)^2 + (x+1)^4$.

8. $2x = cy + y^3$, $y = 0$.

9. $y = \begin{cases} cx^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}, & a \neq 0, 1. \\ x + \ln|x| + c, & a = 0. \\ cx + x\ln|x| - 1, & a = 1. \end{cases}$

10. $y = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4}$.

11. $y^2(x^2 + 1 + ce^{x^2}) = 1$, $y = 0$.

12. $y(cx^2 + 1 + 2\ln x) = 4$, $y = 0$.

13. $y^2 = x + cx^2$.

14. $\frac{1}{2}x^2 + x^3e^{-y} = c$.

15. $(1 - x^2 + x^2y^2)e^{y^2} = cx^2$.

16. $y = (1+x)e^x$.

17. $\varphi(t) = e^{t\varphi'(0)}$

18. (1) 约 5 安培；(2) 约 7.5 安培.

19. $I = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}[\sin(\omega t + \varphi) - e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \sin\varphi]$

其中 $\sin\varphi = \frac{-L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$；$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$.

21. (5) $y = cx - x^2$；(6) $y = c\sqrt{x} - x$.

22. (1) $y = c\sqrt{|1 - x^2|} + x$；(2) $y = x(1 + c\sqrt{|1 - x^2|})$；

(3) $y = c\operatorname{tg}x + \sin x$.

习 题 2.3

1. $x^3 + 3xy - 3y^2 = c$.

2. $x^3-xy+2y^2=c$.

3. $\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|-\dfrac{xy}{x-y}=c$.

4. $x^4+3x^2y^2+y^3=c$.

5. $\sin\dfrac{y}{x}-\cos\dfrac{x}{y}+x-\dfrac{1}{y}=c$.

6. $ye^{x^2}-x^2=c$.

7. $(x^2-2x+2)e^x+x^3y^2=c$.

8. $y(x^2+1)=c$.

9. $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}=x+c$.

10. $2x=y(y^2+c)$; $y=0$.

11. $xy+1=ce^x$.

12. $y=x(c-x)$.

13. $x^3+3x^2y=c$.

14. $x\sin(x+y)=c$.

15. $e^y x\cos x+e^y(y-1)\sin x=c$.

16. $x^4y^2+x^3y^5=c$.

17. $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=f(x+y)$; $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=g(xy)$.

22. $\mu=y^{-n}e^{(n-1)\int P(x)dx}$.

习 题 2.4

1. 令 $y'=\dfrac{1}{t}$; $x=t^3+t^2$, $y=\dfrac{3}{2}t^2+2t+c$.

2. 令 $y'=tx$; $x=\dfrac{1}{t}-t^2$, $y=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{2}{5}t^5+c$.

3. 令 $y'=p$; $y=p^2e^p$, $x=(p+1)e^p+c$, $y=0$.

4. 令 $y'=\operatorname{tg}\varphi$; $y=a(1+\cos2\varphi)$, $x=-a(2\varphi+\sin2\varphi)+c$, $y=2a$.

5. 令 $y'=\cos t$; $x=\sin t$, $y=\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{4}\sin2t+c$.

6. $y=x-\dfrac{1}{x-c}-c$.

习 题 2.5

1. $y=c\cos x+\sin x$.

2. $\frac{y}{x}+\frac{1}{2}y^2=c$.

3. $e^y=2(\sin x-\cos x)+ce^{-x}$.

4. $x=y\left(c-\frac{1}{2}\ln|y|\right)^2$, $y=0$.

5. $e^{\frac{x}{y}}+\ln|x|=c$.

6. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}=c$, $y=0$.

7. $(x+y+1)^3=ce^{2x+y}$.

8. $\frac{1}{y}=\frac{c}{x}+\frac{1}{x^2}$, $y=0$.

9. $y=ce^{3x}-\frac{1}{3}x+\frac{5}{9}$.

10. $x=\frac{1}{p}+p$, $y=\frac{1}{2}p^2-\ln|p|+c$.

11. $\frac{1}{2}x^2-xy+x-\frac{1}{3}y^3-3y=c$.

12. $e^{-(x+y)}+\frac{x^2}{2}=c$.

13. $cx=x^2-y^2$.

14. $x+y+2=ce^x$.

15. $e^{-\frac{y}{x}}+\ln|x|=c$.

16. $(x+1)e^y=2x+c$.

17. $y^2=c(x+1)^2+2x+1$.

18. $(x^3y-3)^2y^{\frac{1}{2}}=c$.

19. $2cy=c^2x^2+4$; $y=\pm 2x$.

20. $y^2=(x+c)^2+1$, $y=\pm 1$.

21. $x+ye^{\frac{x}{y}}=c$.

22. $x^2-y^2=cy^3$.

23. $x+1=y(y+c)$; $y=0$.

24. $\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}=\frac{x^2}{2}+c$.

25. $x=p+e^p$, $y=\frac{p^2}{2}+(p-1)e^p+c$.

26. $(3x^2y+y^3)e^x=c$.

27. $9\ln\left(2x+3y+\frac{22}{7}\right)=14\left(3y-\frac{3}{2}x+c\right)$; $2x+3y+\frac{22}{7}=0$.

28. $x^2-y^2=cy^2e^{x^4}$.

29. $\frac{1}{2}x^2+e^{-xy}=c$.

30. $(x^2+1)(y^3-1)=x^4+y^6+c$.

31. $(x^2+y^2)(y+1)^2=cy^2$; $y=0$.

32. $\sqrt{x^2y^2-1}=c(x+y)$; $x+y=0$.

33. $y-xy'=x$; $y=cx-x\ln|x|$.

34. $\frac{dv}{dt}=kv$; $v\approx0.233$ 米/秒.

35. $m\frac{dv}{dt}=k_1t-k_2v$ $(k_2>0)$, $t=0$ 时 $v=0$;

$v=\frac{k_1m}{k_2^2}e^{-\frac{k_2}{m}t}+\frac{k_1}{k_2}\left(t-\frac{m}{k_2}\right)$.

36. (1) $\tilde{y}=e^x$, $y=e^x+\frac{1}{c+e^x}$;

(2) $\tilde{y}=\sin x$, $y=\sin x+\frac{1}{x+c}$;

(3) $\tilde{y}=-\frac{1}{x}$, $xy=\frac{1}{c-\ln|x|}-1$;

(4) $\tilde{y}=-\frac{1}{2x}$, $2xy=\frac{2}{c-\ln|x|}-1$;

(5) $\tilde{y}=-\frac{1}{x}$, $xy=\frac{2x^3-c}{x^3+c}$;

(6) $\tilde{y}=\frac{1}{x}$, $xy=\frac{4x^3+c}{x^3+c}$;

(7) $\tilde{y}=1$, $y=1+\frac{1}{x+ce^x}$.

习 题 3.1

1. $y_3=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}+\frac{x^{11}}{4400}$.

2. $y_2=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{20}x^5-\frac{11}{30}$.

3. $|x+1|\leqslant\frac{1}{4}$; $y_2=\frac{x^3}{3}-\frac{x}{9}-\frac{x^4}{18}-\frac{x^7}{63}+\frac{11}{42}$; $|y-y_2|\leqslant\frac{1}{24}$.

4. $|y|\geqslant\sigma>0$, σ 为任一正常数;
通过$(0, 0)$的一切解为 $y\equiv0$ 及

$$|y|=\begin{cases}0 & (x\leqslant c)\\ (x-c)^{\frac{3}{2}} & (x>c)\end{cases}$$，其中 $c\geqslant0$ 为任意常数.

习 题 3.3

2. $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}ds\right)$.

3. $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-[P(x_0)y_0+Q(x_0)]\exp\left(\int_{x_0}^{x}P(s)ds\right)$;

$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}P(s)ds\right)$;

$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x)\varphi(x, x_0, y_0)+Q(x)$.

4. 当 $x_0=1$, $y_0=0$ 时$\frac{\partial y}{\partial x_0}=0$, $\frac{\partial y}{\partial y_0}=|x|$.

习 题 3.4

(一) 1. $x=\frac{c}{p^2}$, $y=\frac{2c}{p}+c^2$, $p\neq0$ 为参数, $c\neq0$ 是任意常数; $y=0$; 奇解 $x=-\frac{1}{2p^3}$, $y=-\frac{3}{4p^2}$, $p\neq0$.

2. $x=2p+\ln(p-1)^2+c$, $y=p^2+2p+\ln(p-1)^2+c$; $y=x+1$.

3. $y=cx+\sqrt{1+c^2}$; 奇解 $y=\sqrt{1-x^2}$.

4. $y=cx+c^2$; 奇解 $x^2+4y=0$.

5. $x=\frac{c}{3p^2}-\frac{2}{3}p$, $y=\frac{2c}{3p}-\frac{1}{3}p^2$.

6. $y=cx-\frac{1}{c^2}$; 奇解 $27x^2+4y^3=0$.

7. $x=ce^{-p}-2p+2, y=c(p+1)e^{-p}-p^2+2$.

8. $9(y+c)^2=4x(x-3a)^2$.

9. $\begin{cases} x=-\frac{(p+2)^2}{2}-3\ln|p-2|+c, \\ y=-\frac{1}{3}p^3-p^2-3p-4-6\ln|p-2|+2c. \end{cases}$

$y=2x-\frac{2}{3}$.

10. $y=c(x+1)+c^2$; 奇解 $(x+1)^2+4y=0$.

(二) (1) $x^2+4y=0$; (2) $x^4+4y=0$;

(3) $(x-y)^2=8$; (4) $y^2=4(x+1)$.

(三) $4ax=(x-y+a)^2$.

习 题 4.1

3. $x=c_1e^t+c_2e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t$.

4. $x=c_1e^t+c_2t-(t+1)^2$.

5. $x=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t-\frac{t^2}{8}\cos 2t+\frac{t}{16}\sin 2t$.

6. $\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t; x=x_0\operatorname{ch} t+x_0'\operatorname{sh} t$.

习 题 4.2

2. $x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3e^{2t}+c_4e^{-2t}$.

3. $x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{at}$.

4. $x=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+c_3t^2+c_4t+c_5$.

5. $x=(c_1\cos 3t+c_2\sin 3t)e^{-t}$.

6. $x=\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}$.

7. $a\neq 0$, $s=c_1e^{-at}+c_2e^{at}-\frac{1}{a^2}(t+1)$;

$a=0,\quad s=c_1+c_2t+\frac{1}{6}t^2(t+3).$

8. $x=c_1e^{2t}+e^t(c_2t+c_3)-t-4.$

9. $x=e^t(c_1+c_2t)+e^{-t}(c_3+c_4t)+t^2+1.$

10. $x=e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+c_3e^t-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t).$

11. $x=c_1e^t+c_2e^{-2t}-\frac{2}{5}\cos 2t-\frac{6}{5}\sin 2t.$

12. $x=e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+c_3e^t+\frac{1}{3}te^t.$

13. $a\neq-1,\quad s=e^{-at}(c_1+c_2t)+\frac{1}{(a+1)^2}e^t;$

$a=-1,\quad s=e^t\left(c_1+c_2t+\frac{1}{2}t^2\right).$

14. $x=c_1e^{-t}+c_2e^{-5t}+\frac{1}{21}e^{2t}.$

15. $x=e^t(c_1\cos\sqrt{2}\,t+c_2\sin\sqrt{2}\,t)+\frac{1}{41}(5\cos t-4\sin t)e^{-t}.$

16. $x=c_1\cos t+c_2\sin t+\frac{1}{3}\cos 2t-\frac{1}{2}t\cos t.$

17. $x=e^{2t}(c_1+c_2t)+\frac{1}{2}t^2e^{2t}+e^t+\frac{1}{4}.$

18. $x=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t-\frac{1}{12}t^2\cos 3t+\frac{1}{36}t\sin 3t.$

19. $x=e^t(c_1\cos t+c_2\sin t)+\frac{1}{4}te^t(\cos t+t\sin t).$

20. $x=c_1\cos t+c_2\sin t+\frac{1}{2\sin t}.$

21. $x=c_1\cos t+c_2\sin t+1+t\cos t-\sin t\cdot\ln|\sin t|.$

22. $x=c_1t+c_2\frac{1}{t}.$

23. $x=c_1t^2+c_2t^3+\frac{1}{2}t.$

24. $x=t(c_1\cos\ln t+c_2\sin\ln t)+t\ln t.$

25. $x=\frac{1}{3}(e^{3t}-\cos 3t-\sin 3t).$

26. $x=e^t$.

27. $I=(c_1+c_2t)\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)$, $(R^2C-4L=0)$;

$$I=c_1\exp\left(-\frac{R}{2L}+\frac{1}{2L}\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}\right)t$$

$$+c_2\exp\left(-\frac{R}{2L}-\frac{1}{2L}\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}\right)t, \qquad (R^2C-4L>0);$$

$$I=\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\cdot\left(c_1\cos\frac{t}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}+c_2\sin\frac{t}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}\right)$$

$(R^2C-4L<0)$

28. $S=\frac{F-a}{b}t-\frac{(F-a)P}{b^2g}\left[1-\exp\left(-\frac{bg}{P}t\right)\right]$.

习 题 4.3

1. $9(x+c_2)^2=4(t+c_1)^3$.
2. $x+c_1\ln|x|=t+c_2$; $x=c$.
3. $(x-1)(c_1t+c_2)=1$.
4. $x=\cos(t+c_1)+c_2$ 或 $x=\sin(t+c_1)+c_2$; $x=\pm t+c$.
5. $(t-c_1)^2+(x-c_2)^2=a^2$; 或 $t=-a\sin\varphi+c_1$, $x=a\cos\varphi+c_2$.
6. $e^x=c_2(t^2+c_1)$; $x=c$.
7. $x=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{1\cdot3\cdot5}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n-1}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}+\cdots$.
8. $x=1+\frac{t^3}{2\cdot3}+\frac{t^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6}+\cdots+\frac{t^{3k}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdots(3k-1)3k}+\cdots$.
9. $x=c_1\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2\cdot4}+\frac{t^6}{2\cdot4\cdot6}+\cdots\right)$

$$+c_2\left(t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{3\cdot5}+\frac{t^7}{3\cdot5\cdot7}+\cdots\right).$$

10. $x=c_1J_{\frac{1}{2}}(t)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}(c_1\sin t+c_2\cos t)$.
11. $m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, $t=0$ 时 $x=0$, $\frac{dx}{dt}=0$,

$$x=\frac{m}{k}\ln\left[\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)\right].$$

13. $x=\left(\frac{1}{3}c_1t^3+c_2\right)e^t$.

习 题 5.1

2. *a*)

$$x'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -7t & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ e^{-t}\end{bmatrix},\ \varphi(1)=\begin{bmatrix}7\\ -2\end{bmatrix}.$$

b)

$$x'=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\te^t\end{bmatrix},\ \varphi(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}.$$

c)

$$w'=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\7&0&-6&-5\\0&0&0&1\\15&0&2&-13\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}0\\e^t\\0\\\cos t\end{bmatrix},\ w(0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

3.

$$\varphi_3(t)=\begin{bmatrix}t-\frac{t^3}{3!}\\ 1-\frac{t^2}{2!}\end{bmatrix}$$

习 题 5.2

7. *b*) $\varphi(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{25}(-15t+27)e^{2t}-\frac{2}{25}\cos t-\frac{14}{25}\sin t\\ -\frac{3}{5}e^{2t}-\frac{2}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t\end{bmatrix}$.

8. $\varphi(t)=\begin{bmatrix}\left(1-t+\frac{1}{2}t^2\right)e^{2t}\\ (t-1)e^{2t}\end{bmatrix}$.

9. *a*) $x=\cos t\ln\cos t+t\sin t+c_1\cos t+c_2\sin t$;

b) $x=(c_1\cos\sqrt{3}t+c_2\sin\sqrt{3}t)e^{-t}+c_3e^{2t}+\frac{1}{12}te^{2t}$;

c) $x=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}+\frac{1}{4}e^t$.

习　题　5.3

3. a) $\lambda=-1,\quad x=\begin{bmatrix}\beta\\-\beta\end{bmatrix},\ \beta\neq 0;\quad \lambda=5,\quad x=\begin{bmatrix}\alpha\\2\alpha\end{bmatrix},\ \alpha\neq 0$.

b) $\lambda=-1,\ x=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \alpha\neq 0;\quad \lambda=-2,\quad x=\beta\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\ \beta\neq 0;$

$\lambda=2,\ x=\gamma\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \gamma\neq 0.$

c) $\lambda=3,\ x=\alpha\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\ \alpha\neq 0;$ $\lambda=-1$(二重根), $x=\beta\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix},\ \beta\neq 0.$

d) $\lambda=-1,\ x=\alpha\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\alpha\neq 0;\quad \lambda=-2,\quad x=\beta\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}.\ \beta\neq 0;$

$\lambda=-3,\ x=\gamma\begin{bmatrix}1\\-3\\9\end{bmatrix},\ \gamma\neq 0.$

4. a) $\exp \boldsymbol{A}t$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-(2-\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t}+(2+\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} & e^{\sqrt{3}t}-e^{-\sqrt{3}t}\\ -e^{\sqrt{3}t}+e^{-\sqrt{3}t} & (2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t}-(2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t}\end{bmatrix}$$

b) $\exp \boldsymbol{A}t=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}e^{5t}+2e^{-t} & e^{5t}-e^{-t}\\ 2e^{5t}-2e^{-t} & 2e^{5t}+e^{-t}\end{bmatrix}$

c) $\exp \boldsymbol{A}t=\begin{bmatrix}e^{2t} & e^{-t}-e^{2t} & -e^{-t}+e^{2t}\\ -e^{-2t}+e^{2t} & e^{-t}+e^{-2t}-e^{2t} & -e^{-t}+e^{2t}\\ -e^{-2t}+e^{2t} & e^{-2t}-e^{2t} & e^{2t}\end{bmatrix}$

$$d)\ \exp At = \left[\exp At\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\exp At\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\exp At\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right]$$

$$\exp At\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{7}}\begin{bmatrix}2\sqrt{7}e^{-3t}+(3+\sqrt{7})e^{(2+\sqrt{7})t}+(-3+\sqrt{7})e^{(2-\sqrt{7})t}\\ \frac{-14\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{13+7\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-13+7\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t}\\ \frac{-8\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{10+4\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-10+4\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t}\end{bmatrix},$$

$$\exp At\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{7}}\begin{bmatrix}\frac{2\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{5-\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-5-\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t}\\ \frac{-14\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{-53+25\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{53+25\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t}\\ \frac{-8\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{-2+4\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{2+4\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t}\end{bmatrix},$$

$$\exp At\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{7}}\begin{bmatrix}\frac{-8\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{-2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t}\\ \frac{56\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t}\\ \frac{32\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t}\end{bmatrix}.$$

5. *a*) $\varphi(t)=\begin{bmatrix}2e^{5t}+e^{-t}\\4e^{5t}-e^{-t}\end{bmatrix}$;

$$b)\quad \varphi(t)=\frac{1}{4\sqrt{7}}\begin{bmatrix} \frac{52\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} \\ \qquad +\frac{-4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-364\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{-748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} \\ \qquad +\frac{748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-208\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{-178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} \\ \qquad +\frac{178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{bmatrix};$$

$$c)\quad \exp At=$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t}+\left(t-\frac{1}{4}\right)e^{-t} & \frac{3}{8}e^{3t}+\left(-\frac{1}{2}t-\frac{3}{8}\right)e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{8}e^{3t}+\left(-\frac{1}{2}t+\frac{7}{8}\right)e^{-t} & \frac{3}{16}e^{3t}+\left(\frac{1}{4}t-\frac{3}{16}\right)e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t}+\left(-t-\frac{1}{4}\right)e^{-t} & \frac{3}{8}e^{3t}+\left(\frac{1}{2}t+\frac{5}{8}\right)e^{-t} \end{bmatrix},$$

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}.$$

$$6.\quad a)\quad \varphi(t)=\begin{bmatrix} \frac{3}{20}e^{5t}-e^{-t}-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{2}{5} \\ \frac{3}{10}e^{5t}+e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{5} \end{bmatrix};$$

$$b)\quad \varphi(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-3t}-\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t} \\ -2e^{-2t}+\frac{3}{4}e^{-3t}+\frac{5}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}te^{-t} \\ 4e^{-2t}-\frac{9}{4}e^{-3t}-\frac{7}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t} \end{bmatrix};$$

c) $\varphi(t)=\begin{bmatrix}\cos t-2\sin t+e^t(-4-2\eta_1+3\eta_2)+3e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2)\\ 2\cos t-2\sin t+e^t(-4-2\eta_1+3\eta_2)+2e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2)\end{bmatrix}$.

10. a) $\varphi_1(t)=\frac{1}{2}t+1,\quad \varphi_2(t)=-\frac{1}{2}t$;

b) $\varphi_1(t)=\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{12}e^{2t},\quad \varphi_2(t)=\frac{1}{3}(e^{-t}-e^{2t})$;

c)
$$x_1(t)=\left[\left(\frac{1}{2}\eta_1+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+\left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]e^{\frac{m}{\sqrt{2}}t}$$
$$+\left[\left(\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+\left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2-\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}t},$$

$$x_2(t)=\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+\left(-\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]e^{\frac{m}{\sqrt{2}}t}$$
$$+\left[\left(\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t+\left(-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}t}.$$

习　题　6.1

1. (1) $x=0$ 不稳定；$x=-\frac{A}{B}$稳定.

(2) $x_0=0, x=0; 0<x_0<3, x\to1; x=1$ 稳定，$x=0$ 及 $x=3$ 不稳定.

(3) $x_0=0, x=0; x_0<1, x\to0; x_0>1, x\to3; x=1$ 不稳定，$x=0$及 $x=3$ 稳定.

习　题　6.2

1. (1) $(3,-2)$稳定焦点.

(2) $(1,3)$中心奇点.

2. 奇点$(0,0)$；$ac<0$，鞍点；$ac>0, a\neq c$，$a>0$，不稳定结点；$ac>0$，

$a\neq c$, $a<0$, 稳定结点；$a=c$, $b\neq 0$, 退化结点；$a=c$, $b=0$, 奇结点.

3. (1) $q<0$, 鞍点；$q>0$, $p=0$, 中心奇点；$\Delta<0$, $p\neq 0$, 焦点；$\Delta\geqslant 0$, $q>0$, 结点；$q=0$, 存在奇线.

(2) $p>0$, $q>0$, 渐近稳定；$p=0$, $q>0$, 稳定；$p<0$ 或 $q<0$, 不稳定.

4. $R>0$: $R^2C-4L>0$, 稳定结点, $R^2C-4L=0$, 稳定退化结点, $(R^2C-4L)<0$, 稳定焦点；$R=0$, 中心奇点.

习 题 6.3

1. (1) $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ 及$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$；$x=y=0$和$x=y=\frac{1}{2}$, 不稳定；$x=1, y=0$ 和 $x=0, y=2$, 渐近稳定.

(2) $(0,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$；$x=y=0$ 和 $x=1, y=2$, 不稳定；$x=2, y=1$ 渐近稳定.

(3) $(0,0)$, $\left(-\frac{1}{\mu}, 0\right)$；$x=y=0$ 和 $x=-\frac{1}{\mu}$, $y=0$ 不稳定.

(4) $(0,0)$, $(1,1)$；$x=y=0$ 不稳定；$x=y=1$ 渐近稳定.

2. (1) 渐近稳定.

(2) $\mu<-\frac{1}{2}$, 渐近稳定；$\mu=-\frac{1}{2}$, 稳定；$\mu>-\frac{1}{2}$, 不稳定.

(3) 不稳定.

3. 不稳定.

习 题 6.4

1. (1) 常正；(2) 变号；(3) 定正；(4) 定正；(5) 变号.

2. (1) 稳定；(2) 渐近稳定；(3) 渐近稳定；(4) 不稳定.

3. (1) 渐近稳定；(2) 不稳定；(3) 稳定；(4) $a\leqslant 0$, 稳定；$a>0$, 不稳定. (5) $a<0$, 渐近稳定；$a=0$, 稳定；$a>0$, 不稳定.

5. 稳定.

6. 不能；渐近稳定.

习　题　6.5

1. (1) $x^2+y^2=1$, 半稳定极限圈.

   (2) $x^2+y^2=1$, 稳定极限圈.

   (3) $x^2+y^2=1$, 稳定极限圈; $x^2+y^2=9$, 不稳定极限圈.

2. (1) 无; (2) 无; (3) 在域 $x^2+y^2=2$ 内存在不稳定极限圈.

4. 例如$B(x, y)=be^{-2\beta x}$.

习　题　6.6

1.

(1) $B=\begin{bmatrix}\frac{7}{6} & \frac{1}{18}\\ \frac{1}{18} & \frac{5}{54}\end{bmatrix}$, 定正;

(2) $B=\begin{bmatrix}3\frac{31}{58} & 2\frac{41}{58} & \frac{1}{2}\\ 2\frac{41}{58} & 3\frac{12}{29} & \frac{31}{58}\\ \frac{1}{2} & \frac{31}{58} & \frac{6}{29}\end{bmatrix}$, 定正.

2. $V(x_1, x_2)=\frac{1}{96}(39x_1^2-98x_1x_2+143x_2^2)$, 定正.

习　题　7

(一) 1. $\begin{cases}\left[\frac{1}{4}(2t+1)+x+y\right]e^{-2t}=c_1,\\ \frac{1}{2}t^2+x-y=c_2.\end{cases}$

2. $\begin{cases}(x+y+2)e^{-t}=c_1,\\ (x-y)e^{t}=c_2;\end{cases}$　　$\begin{cases}x=-(1+e^{-t}),\\ y=e^{-t}-1.\end{cases}$

3. $\begin{cases}(x-y)^2+y^2=c_1,\\ \operatorname{arcctg}\frac{x-y}{y}-t=c_2,\end{cases}$

或$\begin{cases} x=(c_2+c_1)\cos t+(c_2-c_1)\sin t, \\ y=c_1\cos t+c_2\sin t; \end{cases}$

$\begin{cases} x=\cos t-\sin t, \\ y=\cos t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y+z=c_1, \\ x^2+y^2+z^2=c_2. \end{cases}$

(二) 1. $u=\Phi(x^2+y^2,\ xy+z)$;

2. $u=\Phi(x^2+y^2+z^2,\ y^2-2yz-z^2)$;

3. $\Phi\left(xy, \dfrac{y^2}{x}-3z\right)=0$;

4. $\Phi\left(zx^3y^3, \dfrac{x^3+y^3}{x^2y^2}\right)=0$;

5. $\Phi\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}, \dfrac{u}{x^n}\right)=0$;

6. $\Phi\left((x-u)s^{\frac{1}{3}},\ (y-u)s^{\frac{1}{3}},\ (z-u)s^{\frac{1}{3}}\right)=0$,

$s=x+y+z+u$;

7. $\Phi(x+y+z,\ xyz)=0$;

8. $\Phi\left((x-y)^2(x+y+z), \dfrac{x-y}{z-x}\right)=0$, $z=y$;

9. $\Phi(xy,\ zy)=0$, $z=3x$;

10. $\Phi(z,\ 2x-zy^2)=0$, $z^5=(zy^2-2x)^3$.

(三) 1. $\Phi(x^2+z^2,\ x^2-y^2)=0$;

2. $\Phi(z^2-x^2,\ x^2-y^2)=0$;

3. $\Phi(z^2+2x^2,\ x^2-y^2)=0$.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝常微分方程　第二版
作者＝王高雄　周之铭　朱思铭　王寿松
页数＝３８１
ＳＳ号＝１００９８７６７
出版日期＝１９７８年１２月第１版